Aufgabe: Berechnen Sie die Endtemperatur, die sich in einer unendlich ausgedehnten planparallelen Platte einstellt, die in ein Kältebad getaucht wird.

Lösung: Um berechnen zu können, ob sich eine in ein Kältebad der Temperatur T getauchte, unendlich ausgedehnte planparallele Platte der Dicke d innerhalb einer Zeit t soweit abgekühlt hat, daß die Temperatur des Kältebades erreicht ist, ist die allgemeine Wärmeleitungsgleichung der Form

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = 0$$

zu lösen. Dabei ist λ die sogenannte Temperaturleitfähigkeit.

Die Temperatur T sei definiert als Abweichung vom Gleichgewichtswert $\overline{T}$, der nach unendlicher Zeit erreicht werden kann, und möge nur von x abhängen, d.h.

$$T = \overline{T} + T^*(x,t)$$

d.h. Verluste in y- und z-Richtung seien von Anfang an auszuschließen. Die Zeit Unendlich muß gewählt werden, weil sich die Temperatur exponentiell ihrem Endwert nähert und es nur darauf ankommt, wie weit man sich diesem nach der Zeit t angenähert hat. Damit ergibt sich die eindimensionale Form der Wärmeleitungsgleichung zu

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} = 0.$$

Auf ihre Lösung wollen wir hier nicht eingehen, sondern sie lediglich angeben:

$$T^*(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(x') e^{-\frac{(x-x')^2}{4\lambda t}} dx'.$$

Als Randbedingungen mögen folgende Werte dienen:

$T(0,0) = T_2$	d.h. zu Beginn des Abkühlungsprozesses befinde sich die Platte auf Raumtemperatur. Selbiges gelte an der Vorderseite wie auf der Rückseite
$T(d,0) = T_2$	
$T(0,\infty) = T_1$	d.h. nach unendlicher Zeit habe die Platte die Temperatur des Kühlmittels T_1 erreicht.
$T(d,\infty) = T_1$	d.h. nach unendlicher Zeit habe die Platte die Temperatur des Kühlmittels T_1 erreicht. Selbiges gelte an der Vorderseite wie auf der Rückseite

Die Anfangstemperaturverteilung $\Theta(x)$ sei definiert durch

$$\Theta(x) = \begin{cases} T_2 - T_1 & \text{für} \quad 0 \le x \le d, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei T_1 die mittlere Temperatur $\overline{T}$ bzw. die am Ende des Temperaturausgleichs angenommene Temperatur des Kühlmittels sei (für flüssigen Stickstoff wären das 77 K) und T_2 die Raumtemperatur (z.B. 293 K). Damit lautet die Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$T(x,t) = T_1 + (T_2 - T_1)\left[\Phi_0\left(\frac{x}{\sqrt{2\lambda t}}\right) + \Phi_0\left(\frac{d-x}{\sqrt{2\lambda t}}\right)\right],$$

wobei

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$$

die normierte und zentrierte Normalverteilung ist, die auch *Error function* genannt wird.

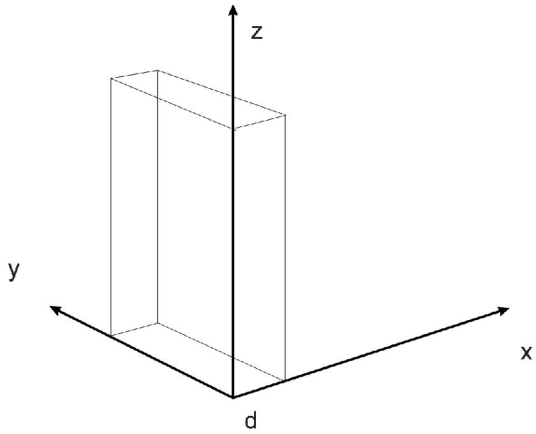
Die Temperaturleitfähigkeit λ errechnet sich aus der Wärmeleitfähigkeit ω, der spezifischen Wärmekapazität c_p und der Dichte ρ des Plattenmaterials nach folgender Relation:

$$\lambda = \frac{\omega}{\rho c_p}.$$

Die folgenden Parameter gelten für Silizium als angenommenes Material:

Meßgröße	Zahlenwert
ω	153 W m^{-1} K^{-1}
ρ	2329 kg/m^3 bei 20° C
c_p	710 J kg^{-1} K^{-1}
t	30 s
T_1	77 K
T_2	293 K

Für die Anordnung der Plattengeometrie gelte folgendes Koordinatensystem:



In Abhängigkeit von der Abmessung *d* ergeben sich daraus nach z.B. 30 s die nachfolgend erreichten Temperaturwerte:

d (mm)	*T* (K)
10	88,2
5	83,0
2	79,6
1	78,3
0,5	77,4
0,2	77,2
0,1	77,0

Unter den angenommenen Bedingungen kann die Forderung, daß die planparallele Platte in einer Zeit t < 30 s auf Kühlmitteltemperatur gebracht ist, als realistisch angesehen werden, wenn die Platte keine Dicke größer 0,5 mm besitzt.