Aufgabe: Leiten Sie die Bahngleichungen einer ballistischen Interkontinentalrakete her und lösen Sie diese mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens.

Lösung: Wir lösen diese Aufgabenstellung in einem rotierenden Bezugssystem, das sich mit der Winkelgeschwindigkeit der Erde ω einmal am Tag um die eigene Achse dreht. Zum Zeitpunkt $t=0$ verlaufe die x-Achse des erdfesten Inertialsystems vom Erdmittelpunkt aus durch den Nullmeridian und den Äquator in einer Ebene, die den Sonnenmittelpunkt schneidet. Das Ausbrennen des Starttriebwerks der ballistischen Rakete erfolge zum Zeitpunkt $t=t_0$. Sei also

$$\vec{F}=m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}_G+\vec{F}_C+\vec{F}_Z$$

die Summe aller Kräfte auf einen Massenpunkt m im rotierenden Bezugssystem der Erde.[1] Dann ist

$$\vec{F}_C=2m\vec{v}\times\vec{\omega}$$

die Corioliskraft mit

$$\vec{v}=v_r\vec{e}_r+v_\lambda\vec{e}_\lambda+v_\varphi\vec{e}_\varphi, \quad \text{und} \quad \vec{\omega}=\omega\vec{e}_z,$$

wobei λ die geographische Länge, φ die geographische Breite und r der Abstand des Schwerpunkts der Rakete zum Erdmittelpunkt ist.[2] Die Kreisfrequenz ω entspricht der Erdrotationsfrequenz und ist konstant. Die z-Achse gehe durch die beiden Pole. Die Einheitsvektoren in Richtung r, φ und λ bilden ein Rechtssystem und sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r&=\cos\varphi\cos(\lambda+\omega t)\vec{e}_x+\cos\varphi\sin(\lambda+\omega t)\vec{e}_y+\sin\varphi\vec{e}_z,\\
\vec{e}_\lambda&=-\sin(\lambda+\omega t)\vec{e}_x+\cos(\lambda+\omega t)\vec{e}_y,\\
\vec{e}_\varphi&=-\sin\varphi\cos(\lambda+\omega t)\vec{e}_x-\sin\varphi\sin(\lambda+\omega t)\vec{e}_y+\cos\varphi\vec{e}_z.
\end{aligned}$$

Ferner sind die Größen v_r, v_λ und v_φ die skalaren Geschwindigkeiten der Komponenten in Richtung ihrer Einheitsvektoren. Das Vektorprodukt der Corioliskraft erhalten wir mit Hilfe der Einheitsvektoren des rotierenden Bezugssystems aus den Kreuzprodukten

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r\times\vec{e}_z&=-\cos\varphi\cdot\vec{e}_\lambda,\\
\vec{e}_\lambda\times\vec{e}_z&=\cos\varphi\cdot\vec{e}_r-\sin\varphi\cdot\vec{e}_\varphi,\\
\vec{e}_\varphi\times\vec{e}_z&=\sin\varphi\cdot\vec{e}_\lambda,
\end{aligned}$$

wobei $\vec{e}_z=\left(\sin\varphi\vec{e}_r+\cos\varphi\vec{e}_\varphi\right)$. Das Ergebnis lautet:

[1] Wir betrachten die ballistisch fliegende Rakete ab diesem Zeitpunkt als Massenpunkt.
[2] Wir haben demnach ein Kepler-Problem zu lösen.

$$\vec{v}\times\vec{\omega}=\omega v_\lambda\cos\varphi\vec{e}_r+\omega\left(v_\varphi\sin\varphi-v_r\cos\varphi\right)\vec{e}_\lambda-\omega v_\lambda\sin\varphi\vec{e}_\varphi.$$

Die Geschwindigkeitskomponenten

$$\begin{aligned}v_r&=\vec{v}\cdot\vec{e}_r=\dot{r},\\ v_\lambda&=\vec{v}\cdot\vec{e}_\lambda=r\left(\dot{\lambda}+\omega\right)\cos\varphi,\\ v_\varphi&=\vec{v}\cdot\vec{e}_\varphi=r\dot{\varphi}\end{aligned}$$

erhalten wir aus dem Skalarprodukt der Bahngeschwindigkeit $\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\vec{e}}_r$ mit den entsprechenden Einheitsvektoren. Deren Ableitungen im rotierenden Bezugssystem sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\dot{\vec{e}}_r&=\left(\dot{\lambda}+\omega\right)\cos\varphi\vec{e}_\lambda+\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi,\\ \dot{\vec{e}}_\lambda&=\left(\dot{\lambda}+\omega\right)\sin\varphi\vec{e}_\varphi-\left(\dot{\lambda}+\omega\right)\cos\varphi\vec{e}_r,\\ \dot{\vec{e}}_\varphi&=-\dot{\varphi}\vec{e}_r-\left(\dot{\lambda}+\omega\right)\sin\varphi\vec{e}_\lambda,\end{aligned}$$

wie man durch Differentiation im Inertialsystem leicht nachrechnet. Im erdfesten Bezugssystem rotiert der Geschwindigkeitsvektor gemäß $\vec{v}=\dot{\vec{r}}=v_x\vec{e}_x+v_y\vec{e}_y+v_z\vec{e}_z$ mit

$$\begin{aligned}\vec{v}=&\left(\left(\dot{r}\cos\varphi-r\dot{\varphi}\sin\varphi\right)\cos\left(\lambda+\omega t\right)-r\left(\dot{\lambda}+\omega\right)\cos\varphi\sin\left(\lambda+\omega t\right)\right)\vec{e}_x\\ &+\left(\left(\dot{r}\cos\varphi-r\dot{\varphi}\sin\varphi\right)\sin\left(\lambda+\omega t\right)+r\left(\dot{\lambda}+\omega\right)\cos\varphi\cos\left(\lambda+\omega t\right)\right)\vec{e}_y\\ &+\left(\dot{r}\sin\varphi+r\dot{\varphi}\cos\varphi\right)\vec{e}_z,\end{aligned}$$

während er im rotierenden Bezugssystem die Darstellung

$$\vec{v}=\dot{r}\vec{e}_r+r\left(\dot{\lambda}+\omega\right)\cos\varphi\vec{e}_\lambda+r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

besitzt. Damit lauten die Komponenten der Corioliskraft

$$\begin{aligned}F_{C,r}&=2m\omega r\left(\dot{\lambda}+\omega\right)\cos^2\varphi,\\ F_{C,\lambda}&=2m\omega\left(-\dot{r}\cos\varphi+r\dot{\varphi}\sin\varphi\right),\\ F_{C,\varphi}&=-2m\omega r\left(\dot{\lambda}+\omega\right)\sin\varphi\cos\varphi.\end{aligned}$$

Für die Zentrifugalkraft gilt

$$\vec{F}_Z=-m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$$

mit $\vec{\omega}=\omega\vec{e}_z$ und $\vec{r}=r\vec{e}_r$. Mit dem Kreuzprodukt $\vec{\omega}\times\vec{r}=\omega r\cos\varphi\vec{e}_\lambda$ folgt weiter

$$\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)=-\omega^2r\cos^2\varphi\vec{e}_r+\omega^2r\sin\varphi\cos\varphi\vec{e}_\varphi,$$

woraus sich die Zentrifugalkraft zu

$$\vec{F}_Z = m\omega^2 r\cos^2\varphi\vec{e}_r - m\omega^2 r\sin\varphi\cos\varphi\vec{e}_\varphi$$

ergibt. Sie besitzt die Komponenten

$$F_{Z,r} = m\omega^2 r\cos^2\varphi,\quad F_{Z,\lambda} = 0,\quad F_{Z,\varphi} = -m\omega^2 r\sin\varphi\cos\varphi.$$

Mit den Einheitsvektoren des rotierenden Systems

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r &= \cos\varphi\cos(\lambda+\omega t)\vec{e}_x + \cos\varphi\sin(\lambda+\omega t)\vec{e}_y + \sin\varphi\vec{e}_z,\\
\vec{e}_\lambda &= -\sin(\lambda+\omega t)\vec{e}_x + \cos(\lambda+\omega t)\vec{e}_y,\\
\vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\cos(\lambda+\omega t)\vec{e}_x - \sin\varphi\sin(\lambda+\omega t)\vec{e}_y + \cos\varphi\vec{e}_z
\end{aligned}$$

erhalten wir auch deren zeitliche Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{e}}_r &= \left(-\dot\varphi\sin\varphi\cos(\lambda+\omega t) - (\dot\lambda+\omega)\cos\varphi\sin(\lambda+\omega t)\right)\vec{e}_x\\
&\quad + \left(-\dot\varphi\sin\varphi\sin(\lambda+\omega t) + (\dot\lambda+\omega)\cos\varphi\cos(\lambda+\omega t)\right)\vec{e}_y + \dot\varphi\cos\varphi\vec{e}_z,\\
\dot{\vec{e}}_\lambda &= -(\dot\lambda+\omega)\cos(\lambda+\omega t)\vec{e}_x - (\dot\lambda+\omega)\sin(\lambda+\omega t)\vec{e}_y,\\
\dot{\vec{e}}_\varphi &= \left(-\dot\varphi\cos\varphi\cos(\lambda+\omega t) + (\dot\lambda+\omega)\sin\varphi\sin(\lambda+\omega t)\right)\vec{e}_x\\
&\quad + \left(-\dot\varphi\cos\varphi\sin(\lambda+\omega t) - (\dot\lambda+\omega)\sin\varphi\cos(\lambda+\omega t)\right)\vec{e}_y - \dot\varphi\sin\varphi\vec{e}_z.
\end{aligned}$$

Alternativ können wir die partiellen Ableitungen auch im mitbewegten System berechnen,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial(\lambda+\omega t)} = \cos\varphi\vec{e}_\lambda, &&\frac{\partial\vec{e}_\lambda}{\partial(\lambda+\omega t)} = -\cos\varphi\vec{e}_r + \sin\varphi\vec{e}_\varphi, &&\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial(\lambda+\omega t)} = -\sin\varphi\vec{e}_\lambda,\\
&\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi} = \vec{e}_\varphi, &&\frac{\partial\vec{e}_\lambda}{\partial\varphi} = 0, &&\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi} = -\vec{e},
\end{aligned}$$

und in Kugelkoordinaten ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{e}}_r &= (\dot\lambda+\omega)\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial(\lambda+\omega t)} + \dot\varphi\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi} = (\dot\lambda+\omega)\cos\varphi\vec{e}_\lambda + \dot\varphi\vec{e}_\varphi,\\
\dot{\vec{e}}_\lambda &= (\dot\lambda+\omega)\frac{\partial\vec{e}_\lambda}{\partial(\lambda+\omega t)} + \dot\varphi\frac{\partial\vec{e}_\lambda}{\partial\varphi} = (\dot\lambda+\omega)\left(\sin\varphi\vec{e}_\varphi - \cos\varphi\vec{e}_r\right),\\
\dot{\vec{e}}_\varphi &= (\dot\lambda+\omega)\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial(\lambda+\omega t)} + \dot\varphi\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi} = -(\dot\lambda+\omega)\sin\varphi\vec{e}_\lambda - \dot\varphi\vec{e}_r.
\end{aligned}$$

Die zeitlichen Ableitungen des Ortsvektors sind dann gegeben durch

$$\vec{r} = r\vec{e}_r,$$
$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\dot{\lambda}\cos\varphi\vec{e}_\lambda,$$
$$\ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\dot{\lambda}^2\cos^2\varphi\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\lambda}\cos\varphi - 2r\dot{\lambda}\dot{\varphi}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\lambda}\cos\varphi\right)\vec{e}_\lambda$$
$$+\left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\dot{\lambda}^2\sin\varphi\cos\varphi\right)\vec{e}_\varphi,$$

und für die Kreuzprodukte können wir schreiben

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = -\omega^2 r\cos^2\varphi\vec{e}_r + \omega^2 r\sin\varphi\cos\varphi\vec{e}_\varphi,$$
$$\vec{v}\times\vec{\omega} = \omega r\dot{\lambda}\cos^2\varphi\vec{e}_r - \omega\left(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi\right)\vec{e}_\lambda - \omega r\dot{\lambda}\sin\varphi\cos\varphi\vec{e}_\varphi.$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung einer ballistischen Interkontinentalrakete:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\gamma\frac{mM}{r^3}\vec{r} + 2m\dot{\vec{r}}\times\vec{\omega} - m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$$
$$= \left(-\gamma\frac{mM}{r^2} + 2m\omega r\dot{\lambda}\cos^2\varphi + m\omega^2 r\cos^2\varphi\right)\vec{e}_r$$
$$-2m\omega\left(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi\right)\vec{e}_\lambda - m\omega r\left(2\dot{\lambda} + \omega\right)\sin\varphi\cos\varphi\vec{e}_\varphi.$$

Daraus ergeben sich sogleich die Bewegungsgleichungen in Radius, Länge und Breite:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\dot{\lambda}^2\cos^2\varphi = -\gamma\frac{M}{r^2} + 2\omega r\dot{\lambda}\cos^2\varphi + \omega^2 r\cos^2\varphi,$$
$$r\ddot{\lambda}\cos\varphi - 2r\dot{\lambda}\dot{\varphi}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\lambda}\cos\varphi = -2\omega\dot{r}\cos\varphi + 2\omega r\dot{\varphi}\sin\varphi,$$
$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\dot{\lambda}^2\sin\varphi\cos\varphi = -2\omega r\dot{\lambda}\sin\varphi\cos\varphi - r\omega^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Nach Zusammenfassung aller Terme und Kürzen der Masse erhalten wir die übersichtlichere Darstellung

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\left(\dot{\lambda} + \omega\right)^2\cos^2\varphi = -\gamma\frac{M}{r^2},$$
$$r\ddot{\lambda} + 2\left(\dot{\lambda} + \omega\right)\left(\dot{r} - r\dot{\varphi}\tan\varphi\right) = 0,$$
$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\left(\dot{\lambda} + \omega\right)^2\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

bzw., wenn wir die Kreisfrequenzen durch die Geschwindigkeiten ausdrücken, die Beschleunigungen im bewegten Bezugssystem in den drei Raumrichtungen:

$$a_r = -\gamma\frac{M}{r^2} + 2\omega v_\lambda\cos\varphi - \omega^2 r\cos^2\varphi,$$
$$a_\lambda = -2\omega v_r\cos\varphi + 2\omega v_\varphi\sin\varphi,$$
$$a_\varphi = -2\omega v_\lambda\sin\varphi + \omega^2 r\sin\varphi\cos\varphi.$$

Einen etwas anderen Lösungsansatz verfolgt der Lagrange-Formalismus, der aber zum selben Ergebnis kommt. Mit

$$v^2 = v_r^2 + v_\lambda^2 + v_\varphi^2 = \dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\lambda}+\omega\right)^2\cos^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2$$

lautet die entsprechende Lagrange-Funktion im rotierenden Bezugssystem

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\lambda}+\omega\right)^2\cos^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2\right) + \gamma\frac{mM}{r}.$$

Die Ableitungen nach den generalisierten Koordinaten sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial r} = mr\left(\dot{\lambda}+\omega\right)^2\cos^2\varphi + mr\dot{\varphi}^2 - \gamma\frac{mM}{r^2},\\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0,\\
&\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mr^2\left(\dot{\lambda}+\omega\right)^2\sin\varphi\cos\varphi,
\end{aligned}$$

und für die Ableitungen nach den zeitlichen Ableitungen der generalisierten Koordinaten erhalten wir

$$\begin{aligned}
&p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},\\
&p_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = mr^2\left(\dot{\lambda}+\omega\right)\cos^2\varphi,\\
&p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}.
\end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Lagrange-Gleichungen zu

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r} = mr\left(\dot{\lambda}+\omega\right)^2\cos^2\varphi + mr\dot{\varphi}^2 - \gamma\frac{mM}{r^2},\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = mr^2\ddot{\lambda}\cos^2\varphi + 2mr\dot{r}\left(\dot{\lambda}+\omega\right)\cos^2\varphi - 2mr^2\left(\dot{\lambda}+\omega\right)\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi = 0,\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} = -mr^2\left(\dot{\lambda}+\omega\right)^2\sin\varphi\cos\varphi.
\end{aligned}$$

Es folgen daraus dieselben Bewegungsgleichungen wie beim vektoriellen Ansatz:

$$\begin{aligned}
&\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\left(\dot{\lambda}+\omega\right)^2\cos^2\varphi = -\gamma\frac{M}{r^2},\\
&r\ddot{\lambda} + 2\left(\dot{\lambda}+\omega\right)\left(\dot{r} - r\dot{\varphi}\tan\varphi\right) = 0,\\
&r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\left(\dot{\lambda}+\omega\right)^2\sin\varphi\cos\varphi = 0.
\end{aligned}$$

Eine dritte Lösungsmethode stellt die Hamilton-Jacobische Gleichung dar. Diese lautet

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right]-\gamma\frac{mM}{r}=E,$$

wobei W die Hamiltonsche charakteristische Funktion ist. Wir suchen für W eine Lösung der Form

$$W=W_r(r)+W_\lambda(\lambda)+W_\varphi(\varphi),$$

mit der die Variablen separiert werden können. Unter diesen Umständen reduziert sich die Hamilton-Jacobische Gleichung auf

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial W_\lambda}{\partial \lambda}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi}\right)^2\right]-\gamma\frac{mM}{r}=E.$$

Da die zu den zyklischen Koordinaten konjugierten Impulse Konstanten sind, können die Transformationsgleichungen wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{\partial W_r}{\partial r}=p_r,\quad \frac{\partial W_\lambda}{\partial \lambda}=p_\lambda,\quad \frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi}=p_\varphi,$$

womit sich die Hamilton-Funktion schreiben läßt als

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\lambda^2}{r^2\cos^2\varphi}+\frac{p_\varphi^2}{r^2}\right)-\gamma\frac{mM}{r},$$

mit der kinetischen Energie

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2m}\vec{p}^{\,2}=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\lambda^2}{r^2\cos^2\varphi}+\frac{p_\varphi^2}{r^2}\right)=\frac{1}{2}m\left(v_r^2+v_\lambda^2+v_\varphi^2\right)\\&=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\left(\dot{\lambda}+\omega\right)^2\cos^2\varphi+r^2\dot{\varphi}^2\right)\end{aligned}$$

und den generalisierten Impulsen

$$\begin{aligned}p_r&=mv_r=m\dot{r},\\p_\lambda&=mr\cos\varphi\cdot v_\lambda=mr^2\left(\dot{\lambda}+\omega\right)\cos^2\varphi,\\p_\varphi&=mrv_\varphi=mr^2\dot{\varphi}.\end{aligned}$$

Die Abhängigkeit von λ tritt nur im zweiten Term des obigen Klammerausdrucks auf. Soll dieser konstant sein, muß der Ausdruck

$$\frac{\partial W_\lambda}{\partial \lambda}=\alpha_\lambda$$

konstant sein. Die Hamilton-Jacobische Gleichung nimmt damit eine noch einfachere Form an:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\alpha_\lambda^2}{\cos^2\varphi}+\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)^2\right)\right]-\gamma\frac{mM}{r}=E.$$

Der neu hinzugekommene Klammerausdruck enthält nur Terme mit φ und muß daher ebenfalls konstant sein:

$$\frac{\alpha_\lambda^2}{\cos^2\varphi}+\left(\frac{\partial W_\varphi}{\partial\varphi}\right)^2=\alpha_\varphi^2.$$

Die Hamilton-Jacobi-Funktion enthält somit nur noch die Variable r und ist gegeben durch

$$\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2+\frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}=2m\left(E+\gamma\frac{mM}{r}\right).$$

Jede der drei Gleichungen spiegelt einen Erhaltungssatz der Bewegung wider. Die erste besagt, daß mit $p_\lambda=\alpha_\lambda$ die z-Komponente des Drehimpulses erhalten bleibt.

Die Größe $\alpha_\varphi=\left|\vec{L}\right|$ entspricht gemäß

$$\frac{\alpha_\lambda^2}{\cos^2\varphi}+p_\varphi^2=\alpha_\varphi^2$$

dem Gesamtdrehimpuls, so daß die Hamiltonfunktion damit geschrieben werden kann als

$$H=\frac{1}{2}m\left(v_r^2+\frac{\left|\vec{L}\right|^2}{m^2r^2}\right)-\gamma\frac{mM}{r}.$$

Setzen wir den Drehimpuls ein, folgt sofort der Energiesatz

$$E=\frac{1}{2}m\left[v_r^2+\frac{\alpha_\varphi^2}{m^2r^2}\right]-\gamma\frac{mM}{r}.$$

Damit können wir die Integrationskonstanten wie folgt bestimmen:

$$\alpha_\lambda=p_{\lambda;0}=m\left(\omega_{\lambda;0}+\omega\right)r_0^2\cos^2\varphi_0=mv_{\lambda;0}r_0\cos\varphi_0,$$

woraus wir den Drehimpuls senkrecht zur Ebene der Drehbewegung erhalten,

$$\alpha_\varphi=\sqrt{\frac{p_{\lambda;0}^2}{\cos^2\varphi_0}+p_{\varphi;0}^2}=mr_0^2\sqrt{\left(\omega_{\lambda;0}+\omega\right)^2\cos^2\varphi_0+\omega_{\varphi;0}^2}=mr_0\sqrt{v_{\lambda;0}^2+v_{\varphi;0}^2},$$

sowie die Energie

$$E = \frac{1}{2} m \left(v_{r;0}^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{m^2 r_0^2} \right) - \gamma \frac{mM}{r_0}.$$

Die Masse der ausgebrannten Rakete muß nicht bekannt sein, um die Bahngleichungen abzuleiten. Wir führen dazu die normierten Größen

$$\alpha_{\lambda;m} \equiv \frac{\alpha_\lambda}{m} = r_0 v_{\lambda;0} \cos\varphi_0 \quad \alpha_{\varphi;m} \equiv \frac{\alpha_\varphi}{m} = \sqrt{\frac{\alpha_{\lambda;m}^2}{\cos^2\varphi_0} + r_0^4 \omega_{\varphi;0}^2}, \quad E_m \equiv \frac{2E}{m} = v_{r;0}^2 + \frac{\alpha_{\varphi;m}^2}{r_0^2} - \frac{2\gamma M}{r_0}$$

ein. Die Konstanten der Bewegung hängen somit nur vom gemessenen Abstand r_0, der gemessenen Breite φ_0 sowie den gemessenen Geschwindigkeiten im bewegten Bezugssystem zum Zeitpunkt des Ausbrennens des Starttriebwerks ab. Danach fliegt die Rakete ballistisch weiter.

Die analytische Lösung der Radialgleichung erhalten wir durch Umformen des Energiesatzes aus der Definition der Radialgeschwindigkeit

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \sqrt{E_m + \frac{2\gamma M}{r} - \frac{\alpha_{\varphi:m}^2}{r^2}}.$$

Die Integration ergibt

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{E_m + \frac{2\gamma M}{r} - \frac{\alpha_{\varphi:m}^2}{r^2}}} = \int_{t_0}^{t} dt.$$

Dies liefert den impliziten Ausdruck

$$t - t_0 = \frac{1}{E_m}\left(\sqrt{E_m r^2 + 2\gamma M r - \alpha_{\varphi;m}^2} - \sqrt{E_m r_0^2 + 2\gamma M r_0 - \alpha_{\varphi;m}^2} \right)$$
$$+ \gamma M \sqrt{-\frac{1}{E_m}}^3 \left(\arcsin\frac{\gamma M + E_m r_0}{\sqrt{\gamma^2 M^2 + E_m \alpha_{\varphi;m}^2}} - \arcsin\frac{\gamma M + E_m r}{\sqrt{\gamma^2 M^2 + E_m \alpha_{\varphi;m}^2}} \right),$$

der nicht nach r aufgelöst werden kann. Als nächstes lösen wir die Breitengleichung

$$d\varphi = \frac{dt}{r^2} \frac{\sqrt{\alpha_{\varphi;m}^2 \cos^2\varphi - \alpha_{\lambda;m}^2}}{\cos\varphi}.$$

Durch Trennung der Variablen und Einsetzen der Radialgeschwindigkeit folgt

$$\frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{\alpha_{\varphi;m}^2\cos^2\varphi-\alpha_{\lambda;m}^2}}=\frac{dt}{r^2}=\frac{dr}{r^2 v_r}=\frac{dr}{r\sqrt{E_m r^2+2\gamma Mr-\alpha_{\varphi;m}^2}},$$

und nach Integration beider Seiten und weiterer Substitution erhalten wir den Ausdruck

$$\int\limits_{\sin\varphi_0}^{\sin\varphi}\frac{dx}{\sqrt{\dfrac{\alpha_{\varphi;m}^2-\alpha_{\lambda;m}^2}{\alpha_{\varphi;m}^2}-x^2}}=\int\limits_{\frac{\alpha_{\varphi;m}}{\sqrt{\alpha_{\varphi;m}^2-\alpha_{\lambda;m}^2}}\sin\varphi_0}^{\frac{\alpha_\varphi}{\sqrt{\alpha_\varphi^2-\alpha_\lambda^2}}\sin\varphi}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\alpha_{\varphi;m}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dr}{r\sqrt{E_m r^2+2\gamma Mr-\alpha_{\varphi;m}^2}}.$$

Die analytische Lösung der Breitengleichung lautet damit

$$\arcsin\frac{\alpha_{\varphi;m}\sin\varphi}{\sqrt{\alpha_{\varphi;m}^2-\alpha_{\lambda;m}^2}}=\arcsin\frac{\gamma Mr-\alpha_{\varphi;m}^2}{r\sqrt{\gamma^2M^2+E_m\alpha_{\varphi;m}^2}}-\arcsin\frac{\gamma Mr_0-\alpha_{\varphi;m}^2}{R\sqrt{\gamma^2M^2+E_m\alpha_{\varphi;m}^2}}$$
$$+\arcsin\frac{\alpha_{\varphi;m}\sin\varphi_0}{\sqrt{\alpha_{\varphi;m}^2-\alpha_{\lambda;m}^2}}.$$

Sind die Konstanten der Bewegung aus den Anfangsbedingungen bekannt, läßt sich die Breite in Abhängigkeit vom Abstand *r* nach folgender Formel berechnen:

$$\varphi(r)=\arcsin\left[\frac{\sqrt{\alpha_{\varphi;m}^2-\alpha_{\lambda;m}^2}}{\alpha_{\varphi;m}}\sin\left(\arcsin\frac{\gamma Mr-\alpha_{\varphi;m}^2}{r\sqrt{\gamma^2M^2+E_m\alpha_{\varphi;m}^2}}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\arcsin\frac{\gamma Mr_0-\alpha_{\varphi;m}^2}{r_0\sqrt{\gamma^2M^2+E_m\alpha_{\varphi;m}^2}}+\arcsin\frac{\alpha_{\varphi;m}\sin\varphi_0}{\sqrt{\alpha_{\varphi;m}^2-\alpha_{\lambda;m}^2}}\right)\right].$$

Die zeitliche Änderung der Breitengleichung erhalten wir mit Hilfe der Ableitung nach *r*,

$$\frac{d\varphi}{dr}=\frac{\sqrt{\alpha_{\varphi;m}^2\cos^2\varphi-\alpha_{\lambda;m}^2}}{r\cos\varphi}\frac{1}{\sqrt{E_m r^2+2\gamma Mr-\alpha_{\varphi;m}^2}},$$

und anschließender Anwendung der Kettenregel:

$$\dot\varphi=\frac{d\varphi}{dr}\frac{dr}{dt}=\frac{\sqrt{\alpha_{\varphi;m}^2\cos^2\varphi-\alpha_{\lambda;m}^2}}{r\cos\varphi}\frac{v_r}{\sqrt{E_m r^2+2\gamma Mr-\alpha_{\varphi;m}^2}}.$$

Nach Multiplikation mit dem Abstand *r* ergibt sich die Geschwindigkeitskomponente in der Breite:

$$v_\varphi=\frac{\sqrt{\alpha_{\varphi;m}^2\cos^2\varphi-\alpha_{\lambda;m}^2}}{\cos\varphi\sqrt{E_m r^2+2\gamma Mr-\alpha_{\varphi;m}^2}}v_r.$$

Zur analytischen Lösung der Längengleichung setzen wir das Zeitdifferential

$$\frac{dt}{r^2} = \frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{\alpha_{\varphi;m}^2 \cos^2\varphi - \alpha_{\lambda;m}^2}}$$

in den Ausdruck

$$d\lambda = \frac{\alpha_{\lambda;m}}{\cos^2\varphi}\frac{dt}{r^2} - \omega dt$$

ein und erhalten

$$d\lambda = \frac{\alpha_{\lambda;m}}{\cos\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha_{\varphi;m}^2 \cos^2\varphi - \alpha_{\lambda;m}^2}} - \omega dt = \frac{\alpha_{\lambda;m}}{\alpha_{\varphi;m}}\frac{1}{1-\sin^2\varphi}\frac{d\sin\varphi}{\sqrt{\frac{\alpha_{\varphi;m}^2 - \alpha_{\lambda;m}^2}{\alpha_{\varphi;m}^2} - \sin^2\varphi}} - \omega dt.$$

Nach Variablensubstitution folgt zunächst das Integral

$$\lambda = \lambda_0 - \omega\left(t - t_0\right) + \frac{\alpha_{\lambda;m}}{\alpha_{\varphi;m}}\int_{\sin\varphi_0}^{\sin\varphi}\frac{1}{1-x^2}\frac{dx}{\sqrt{\frac{\alpha_{\varphi;m}^2 - \alpha_{\lambda;m}^2}{\alpha_{\varphi;m}^2} - x^2}},$$

dessen Lösung die geographische Länge in Abhängigkeit von der Breite und der Zeit t ergibt:

$$\lambda = \lambda_0 - \omega\left(t - t_0\right) + \arctan\frac{\alpha_{\lambda;m}\sin\varphi}{\sqrt{\alpha_{\varphi;m}^2\cos^2\varphi - \alpha_{\lambda;m}^2}} - \arctan\frac{\alpha_{\lambda;m}\sin\varphi_0}{\sqrt{\alpha_{\varphi;m}^2\cos^2\varphi_0 - \alpha_{\lambda;m}^2}}.$$

Eliminiert man noch die verbliebene Zeitdifferenz, so hängt auch λ nur von r ab. Die Winkelgeschwindigkeit zur geographischen Breite folgt aus der Kettenregel gemäß

$$\dot{\lambda} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{d}{d\varphi}\arctan\frac{\alpha_{\lambda;m}\sin\varphi}{\sqrt{\alpha_{\varphi;m}^2\cos^2\varphi - \alpha_{\lambda;m}^2}} - \omega = \frac{\dot{\varphi}}{\cos\varphi}\frac{\alpha_{\lambda;m}}{\sqrt{\alpha_{\varphi;m}^2\cos^2\varphi - \alpha_{\lambda;m}^2}} - \omega.$$

Die Ableitung der Längengleichung liefert also ebenfalls einen analytischen Ausdruck,

$$\dot{\lambda} = \frac{\alpha_{\lambda;m}}{\cos\varphi}\frac{\omega_\varphi}{\sqrt{\alpha_{\varphi;m}^2\cos^2\varphi - \alpha_{\lambda;m}^2}} - \omega.$$

Daraus läßt sich auch die Geschwindigkeitskomponente

$$v_\lambda = \frac{\alpha_{\lambda;m} v_\varphi}{\sqrt{\alpha_{\varphi;m}^2\cos^2\varphi - \alpha_{\lambda;m}^2}} = \frac{\alpha_{\lambda;m} v_r}{\cos\varphi\sqrt{E_m r^2 + 2\gamma M r - \alpha_{\varphi;m}^2}}$$

ableiten, d.h. die Geschwindigkeit in Richtung der geographischen Länge ist proportional zu jener der geographischen Breite und umgekehrt. Im rotierenden Bezugssystem messen wir aber vielmehr die Geschwindigkeit senkrecht zur Radialgeschwindigkeit, die gegeben ist durch

$$v_\rho \equiv \sqrt{v_\lambda^2 + v_\varphi^2} = \frac{\alpha_{\varphi;m}\cos\varphi}{\sqrt{\alpha_{\varphi;m}^2\cos^2\varphi - \alpha_{\lambda;m}^2}}v_\varphi = \frac{\alpha_{\varphi;m}v_r}{\sqrt{E_m r^2 + 2\gamma M r - \alpha_{\varphi;m}^2}}.$$

Aus der gemessenen Horizontalgeschwindigkeit v_ρ können damit auch die Geschwindigkeiten in Länge und Breite sowie die Radialgeschwindigkeit berechnet werden:

$$v_r = \frac{\sqrt{E_m r^2 + 2\gamma M r - \alpha_{\varphi;m}^2}}{\alpha_{\varphi;m}}v_\rho, \quad v_\lambda = \frac{\alpha_{\lambda;m}}{\alpha_{\varphi;m}\cos\varphi}v_\rho, \quad v_\varphi = v_\rho\sqrt{1 - \frac{\alpha_{\lambda;m}^2}{\alpha_{\varphi;m}^2\cos^2\varphi}}.$$

Die Projektion v_ρ der Bahngeschwindigkeit im rotierenden Bezugssystem schließe mit der Nord-Süd-Achse den Winkel $\gamma = \arctan\left(v_\lambda/v_\varphi\right)$ ein. Daraus ergeben sich die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors in Länge und Breite zu

$$v_\lambda = v_\rho\sin\gamma, \quad v_\varphi = v_\rho\cos\gamma.$$

Die Steiggeschwindigkeit $\vec{v}_r$ ist gleich der senkrechten Geschwindigkeitskomponente und kann direkt gemessen werden. Außerdem schließt die Geschwindigkeit $\vec{v}$ mit der Vertikalen, d.h. mit der Radialgeschwindigkeit $\vec{v}_r$, den Winkel θ ein, d.h. es gilt

$$v_r = \vec{v}\cdot\vec{e}_r = v\cos\theta, \quad v_\rho = \vec{v}\cdot\vec{e}_\rho = v\sin\theta,$$

wobei $\vec{v}_\rho$ die Horizontalgeschwindigkeit ist, mit

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\rho^2} \quad \text{und} \quad \theta = \arctan\frac{v_\rho}{v_r}.$$

Die Weglänge der Bahnkurve einer Interkontinentalrakete berechnet sich aus der Bahngeschwindigkeit,

$$s = \int_{t_0}^{t}\sqrt{E_m + \frac{2\gamma M}{r(t)}}dt,$$

und kann nur numerisch bestimmt werden. In jedem Fall können die Konstanten der Bewegung durch Messung der Anfangsbedingungen bestimmt werden:

$$\alpha_{\lambda;m}(r_0,\lambda_0,\varphi_0,v_{r;0},v_{\lambda;0},v_{\varphi;0}) = r_0 v_{\lambda;0}\cos\varphi_0,$$
$$\alpha_{\varphi;m}(r_0,\lambda_0,\varphi_0,v_{r;0},v_{\lambda;0},v_{\varphi;0}) = r_0\sqrt{v_{\lambda;0}^2 + v_{\varphi;0}^2},$$
$$E_m(r_0,\lambda_0,\varphi_0,v_{r;0},v_{\lambda;0},v_{\varphi;0}) = v_{r;0}^2 + v_{\lambda;0}^2 + v_{\varphi;0}^2 - \frac{2\gamma M}{r_0}.$$

Wahlweise kann man die Anfangsgeschwindigkeiten auch in Winkelgeschwindigkeiten transformieren:

$$\alpha_{\lambda;m}\left(r_0,\lambda_0,\varphi_0,v_{r;0},\omega_{\lambda;0},\omega_{\varphi;0}\right) = \left(\omega_{\lambda;0}+\omega\right) r_0^2\cos^2\varphi_0,$$
$$\alpha_{\varphi;m}\left(r_0,\lambda_0,\varphi_0,v_{r;0},\omega_{\lambda;0},\omega_{\varphi;0}\right) = r_0^2\sqrt{\left(\omega_{\lambda;0}+\omega\right)^2\cos^2\varphi_0 + \omega_{\varphi;0}^2},$$
$$E_m\left(r_0,\lambda_0,\varphi_0,v_{r;0},\omega_{\lambda;0},\omega_{\varphi;0}\right) = v_{r;0}^2 + r_0^2\left[\left(\omega_{\lambda;0}+\omega\right)^2\cos^2\varphi_0 + \omega_{\varphi;0}^2\right] - \frac{2\gamma M}{r_0}.$$

Ein vollständiges System von Differentialgleichungen zur Beschreibung der Bahnkurve einer ballistischen Interkontinentalrakete lautet demnach:

$$\dot r = v_r \equiv f_1\left(r,\lambda,\varphi,v_r,\omega_\lambda,\omega_\varphi\right),$$
$$\dot\lambda = \omega_\lambda \equiv f_2\left(r,\lambda,\varphi,v_r,\omega_\lambda,\omega_\varphi\right),$$
$$\dot\varphi = \omega_\varphi \equiv f_3\left(r,\lambda,\varphi,v_r,\omega_\lambda,\omega_\varphi\right),$$
$$\dot v_r = \ddot r \equiv f_4\left(r,\lambda,\varphi,v_r,\omega_\lambda,\omega_\varphi\right) = -\gamma\frac{M}{r^2} + r\left(\omega_\lambda+\omega\right)^2\cos^2\varphi + r\omega_\varphi^2,$$
$$\dot\omega_\lambda = \ddot\lambda \equiv f_5\left(r,\lambda,\varphi,v_r,\omega_\lambda,\omega_\varphi\right) = -\frac{2}{r}\left(\omega_\lambda+\omega\right)\left(v_r - r\omega_\varphi\tan\varphi\right),$$
$$\dot\omega_\varphi = \ddot\varphi \equiv f_6\left(r,\lambda,\varphi,v_r,\omega_\lambda,\omega_\varphi\right) = -\left(\omega_\lambda+\omega\right)^2\sin\varphi\cos\varphi - \frac{2}{r}\omega_\varphi v_r.$$

Dabei sind die Anfangsbedingungen des Ortsvektors gegeben durch

$$r\left(t_0\right) = r_0,\quad \varphi\left(t_0\right) = \varphi_0,\quad \lambda\left(t_0\right) = \lambda_0.$$

Die Anfangsbedingungen der ersten Ableitungen können nicht aus den Konstanten der Bewegung ermittelt werden, weil diese zu Beginn der Bewegung noch nicht bekannt sind, sondern müssen zunächst aus den Ortskoordinaten und den Anfangsgeschwindigkeiten zu diesem Zeitpunkt bestimmt werden:

$$\dot r_0\left(t_0\right) \equiv v_{r;0},\quad \dot\lambda\left(t_0\right) \equiv \omega_{\lambda;0} = \frac{v_{\lambda;0}}{r_0\cos\varphi_0} - \omega,\quad \dot\varphi\left(t_0\right) \equiv \omega_{\varphi;0} = \frac{v_{\varphi;0}}{r_0}.$$

Schließlich sind die Anfangsbedingungen der zweiten Ableitungen gegeben durch

$$\ddot{r}\left(t_0\right) \equiv \dot{v}_{r;0} = -\gamma \frac{M}{r_0^2} + r_0 \left(\omega_{\lambda;0} + \omega\right)^2 \cos^2 \varphi_0 + r_0 \omega_{\varphi;0}^2 ,$$

$$\ddot{\lambda}\left(t_0\right) \equiv \dot{\omega}_{\lambda;0} = -\frac{2}{r_0}\left(\omega_{\lambda;0} + \omega\right)\left(v_{r;0} - r_0 \omega_{\varphi;0} \tan \varphi_0\right),$$

$$\ddot{\varphi}\left(t_0\right) \equiv \dot{\omega}_{\varphi;0} = -\left(\omega_{\lambda;0} + \omega\right)^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - \frac{2}{r_0} \omega_{\varphi;0} v_{r;0} .$$

Mit Hilfe der Relationen

$$v_{\lambda;0} = \frac{v_{\rho;0}}{\cos \varphi_0} \frac{\alpha_{\lambda;m}}{\alpha_{\varphi;m}}, \quad v_{\varphi;0} = v_{\rho;0} \sqrt{1 - \frac{\alpha_{\lambda;m}^2}{\alpha_{\varphi;m}^2} \frac{1}{\cos^2 \varphi_0}} ,$$

wobei $v_{\lambda;0} = v_{\rho;0} \sin \gamma_0$ und $v_{\varphi;0} = v_{\rho;0} \cos \gamma_0$ sowie

$$v_{\rho;0} = \sqrt{\left(v_{r;0} \cos \varphi_0 - v_{\varphi;0} \sin \varphi_0\right)^2 + v_{\lambda;0}^2} ,$$

können wir eine der Konstanten der Bewegung eliminieren, indem wir das Verhältnis

$$\frac{\alpha_{\lambda;m}}{\alpha_{\varphi;m}} = \frac{v_{\lambda;0}}{v_{\rho;0}} \cos \varphi_0 = \sin \gamma_0 \cos \varphi_0$$

bilden. Damit ergibt sich

$$\alpha_{\lambda;m} = v_{\rho;0} r_0 \sin \gamma_0 \cos \varphi_0 , \quad \alpha_{\varphi;m} = v_{\rho;0} r_0 .$$

Sind die Anfangsgeschwindigkeiten und die Ortskoordinaten zu Beginn der Bewegung einmal bekannt, können auch die Konstanten der Bewegung daraus abgeleitet werden, wobei die Energie vom Drehimpuls und der Drehimpuls wiederum von seiner z-Komponente abhängt:

$$\alpha_{\lambda;m}(r_0, \lambda_0, \varphi_0, v_{r;0}, v_{\lambda;0}, v_{\varphi;0}) = v_{\rho;0} r_0 \sin \gamma_0 \cos \varphi_0 = r_0 v_0 \sin \theta_0 \sin \gamma_0 \cos \varphi_0$$
$$\alpha_{\varphi;m}(r_0, \lambda_0, \varphi_0, v_{r;0}, v_{\lambda;0}, v_{\varphi;0}) = v_{\rho;0} r_0 = r_0 v_0 \sin \theta_0$$
$$E_m(r_0, \lambda_0, \varphi_0, v_{r;0}, v_{\lambda;0}, v_{\varphi;0}) = v_{r;0}^2 + v_{\rho;0}^2 - \frac{2\gamma M}{r_0} = v_0^2 - \frac{2\gamma M}{r_0}$$

Mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens werden nun die beiden Zustandsvektoren

$$\vec{x}_i = (r_i, \lambda_i, \varphi_i, v_{r,i}, \omega_{\lambda,i}, \omega_{\varphi,i}),$$
$$\vec{x}_{i+1} = (r_{i+1}, \lambda_{i+1}, \varphi_{i+1}, v_{r,i+1}, \omega_{\lambda,i+1}, \omega_{\varphi,i+1})$$

gemäß der Regel

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \frac{h}{6}(\vec{a}_i + 2\vec{b}_i + 2\vec{c}_i + \vec{d}_i)$$

fortgeschrieben, wobei h die Schrittweite ist. Die darin vorkommenden Koeffizienten sind gegeben durch die Vektorfunktion $\vec{f}$ und lauten:

$$
\begin{aligned}
\vec{a}_i &= \vec{f}\left(\vec{x}_i\right),\\
\vec{b}_i &= \vec{f}\left(\vec{x}_i + (h/2)\vec{a}_i\right),\\
\vec{c}_i &= \vec{f}\left(\vec{x}_i + (h/2)\vec{b}_i\right),\\
\vec{d}_i &= \vec{f}\left(\vec{x}_i + h\vec{d}_i\right).
\end{aligned}
$$

Für die Komponenten eines jeden dieser vier Vektoren gilt

$$
\begin{aligned}
a_{j,i} &= f_j(r_i, \lambda_i, \varphi_i, v_{r,i}, \omega_{\lambda,i}, \omega_{\varphi,i}),\\
b_{j,i} &= f_j\Big(r_i + (h/2)a_{1,i}, \lambda_i + (h/2)a_{2,i}, \varphi_i + (h/2)a_{3,i},\\
&\qquad v_{r,i} + (h/2)a_{4,i}, \omega_{\lambda,i} + (h/2)a_{5,i}, \omega_{\varphi,i} + (h/2)a_{6,i}\Big),\\
c_{j,i} &= f_j\Big(r_i + (h/2)b_{1,i}, \lambda_i + (h/2)b_{2,i}, \varphi_i + (h/2)b_{3,i},\\
&\qquad v_{r,i} + (h/2)b_{4,i}, \omega_{\lambda,i} + (h/2)b_{5,i}, \omega_{\varphi,i} + (h/2)b_{6,i}\Big),\\
d_{j,i} &= f_j\Big(r_i + hc_{1,i}, \lambda_i + hc_{2,i}, \varphi_i + hc_{3,i}, v_{r,i} + hc_{4,i}, \omega_{\lambda,i} + hc_{5,i}, \omega_{\varphi,i} + hc_{6,i}\Big).
\end{aligned}
$$

Damit berechnen sich die Komponenten des $(i+1)$ten Zustandsvektors zu

$$
x_{j,i+1} = x_{j,i} + \frac{h}{6}(a_{j,i} + 2b_{j,i} + 2c_{j,i} + d_{j,i}) \quad \text{für} \quad j = 1, \dots, 6.
$$

Die 6 Gleichungen erhalten wir entsprechend:

$$
\begin{aligned}
v_{r,i+1} &= v_{r,i} + \frac{h}{6}(a_{1,i} + 2b_{1,i} + 2c_{1,i} + d_{1,i}),\\
r_{i+1} &= r_i + \frac{h}{6}(a_{2,i} + 2b_{2,i} + 2c_{2,i} + d_{2,i}),\\
\omega_{\lambda,i+1} &= \omega_{\lambda,i} + \frac{h}{6}(a_{3,i} + 2b_{3,i} + 2c_{3,i} + d_{3,i}),\\
\lambda_{i+1} &= \lambda_i + \frac{h}{6}(a_{4,i} + 2b_{4,i} + 2c_{4,i} + d_{4,i}),\\
\omega_{\varphi,i+1} &= \omega_{\varphi,i} + \frac{h}{6}(a_{5,i} + 2b_{5,i} + 2c_{5,i} + d_{5,i}),\\
\varphi_{i+1} &= \varphi_i + \frac{h}{6}(a_{6,i} + 2b_{6,i} + 2c_{6,i} + d_{6,i}).
\end{aligned}
$$

Umseitig sind noch zwei Simulationsergebnisse für Flugbahnen ballistischer Mittelstrecken-raketen von Iran nach Europa dargestellt.

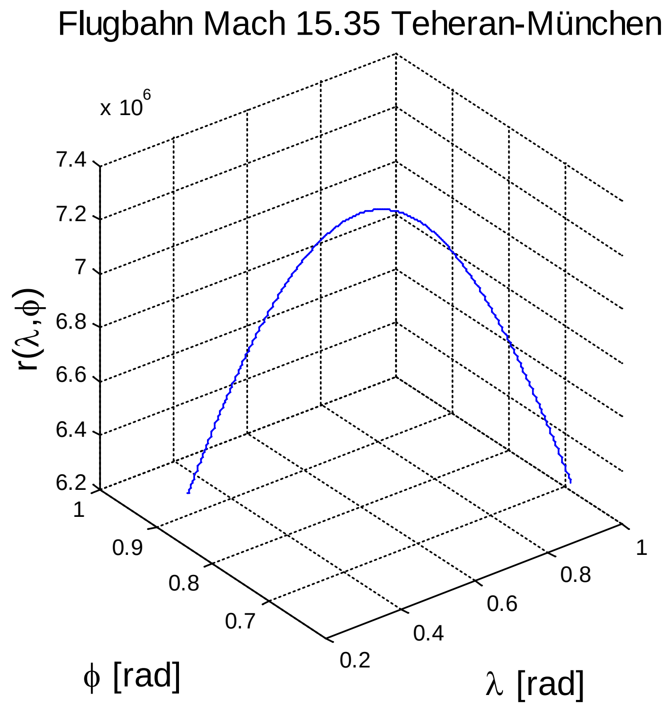

Abbildung 1. Simulation der Flugbahn einer Mittelstreckenrakete von Teheran nach München

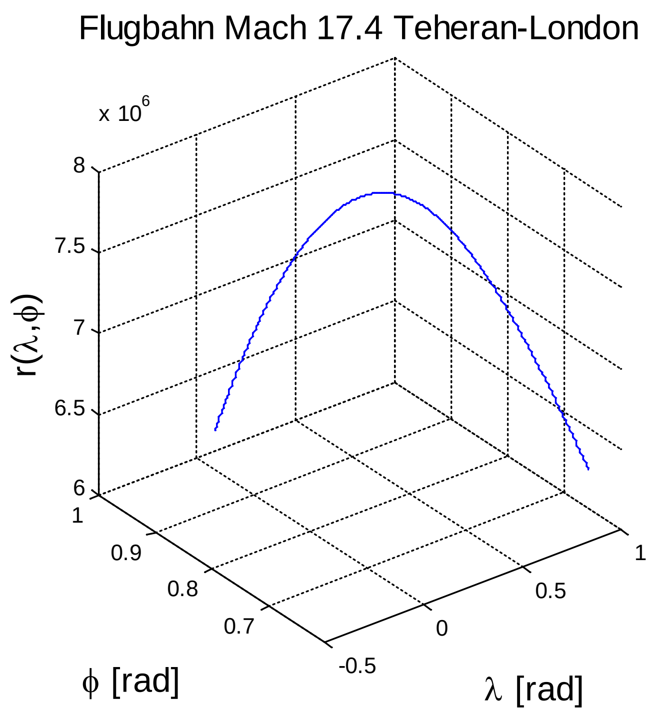

Abbildung 2. Simulation der Flugbahn einer ballistischen Mittelstreckenrakete von Teheran nach London