

# Physikaufgabe 97

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

**Aufgabe:** Zeigen Sie, daß sich das All mit Lichtgeschwindigkeit ausdehnt und danach wieder zusammenzieht, und daß die Weltlinien geschlossene Orthodromen sind, die durch die Singularität verlaufen. Was schließen Sie daraus?

**Beweis:** Stellen wir uns das Weltall als einen sich bis zu seiner maximalen Größe ausdehnenden Ballon vor oder vereinfacht als einen sich ausdehnenden Kreis wie in Abb. 1.

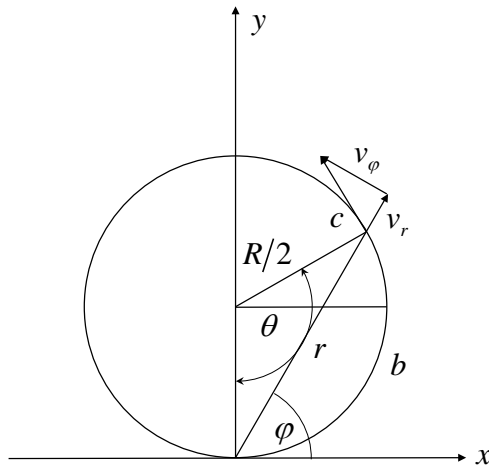


Abbildung 1. Das Weltall dargestellt als ein zweidimensional sich aufblähender Ballon

Den Ballon beschreiben wir im einfachsten Fall durch eine Kreisgleichung:

$$x^2 + \left(y - \frac{R}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4},$$

wobei  $y_0 = R/2$  der Mittelpunkt der Trajektorie in  $y$ -Richtung ist und  $R$  der maximale Radius des Alls zum Zeitpunkt seiner größten Ausdehnung im Ruhesystem.<sup>1</sup> Zum Zeitpunkt des Urknalls  $t=0$  entspringt die Weltlinie der Singularität  $x=y=0$ . Das  $x$ - $y$ -System sei ein unbewegtes Inertialsystem. Da sich das Licht nach allen Richtungen mit derselben Geschwindigkeit  $c$  ausbreitet, erfolgt im Weltall die Bewegung im Azimut mit der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta} = 2c/R$ , wobei  $\theta$  der Winkel ist, der relativ zur Singularität längs des Bogens  $b$  zurückgelegt wird, also ist  $b = R\theta/2 = ct$ . Aufgrund der trigonometrischen Verhältnisse erhalten wir mit Hilfe der Expansionsgrößen

$$R(t) = R \sin \frac{c}{R} t, \quad \dot{R}(t) = c \cos \frac{c}{R} t$$

die Bewegungsgleichungen

$$x(t) = R(t) \cos \frac{c}{R} t = R \sin \frac{c}{R} t \cos \frac{c}{R} t = \frac{1}{2} R \sin \frac{2c}{R} t,$$
$$y(t) = R(t) \sin \frac{c}{R} t = R \sin^2 \frac{c}{R} t = \frac{1}{2} R \left(1 - \cos \frac{2c}{R} t\right),$$

<sup>1</sup> Der Mittelpunkt des Ruhesystems werde in die Singularität verlegt.

## Physikaufgabe 97

---

mit den Ableitungen

$$\dot{x}(t) = c \cos \frac{2c}{R}t, \quad \dot{y}(t) = c \sin \frac{2c}{R}t,$$

wobei  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = c^2$ . Definieren wir nun das differentielle Weltlinienelement durch

$$ds^2 \equiv c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 = 0,$$

erhalten wir aus der Konstanz von  $s$  im vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum den Energiesatz in Form von zwei Beiträgen aus kinetischer Energie in radialer Ausbreitungsrichtung und Rotationsenergie in azimuthaler Richtung:

$$mc^2 = mv_r^2 + mv_\phi^2 = m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\phi}^2.$$

Aus dem Satz des Pythagoras folgt für den radialen Abstand eines Weltpunktes von der Singularität die trigonometrische Abhängigkeit

$$r^2(t) = x^2(t) + y^2(t) = \frac{1}{2}R^2 \left( 1 - \cos \frac{2c}{R}t \right) = R^2 \sin^2 \frac{c}{R}t.$$

Der zeitliche Abstand einer Weltlinie von der Singularität berechnet sich demnach gemäß der Formel

$$r(t) = R \sin \frac{c}{R}t,$$

wobei die Radialgeschwindigkeit eines Weltpunktes proportional zur Zeit anwächst:<sup>2</sup>

$$\dot{r}(t) = c \cos \frac{c}{R}t.$$

Die Winkelgeschwindigkeit einer Weltlinie ist nach dem Satz des Pythagoras

$$c^2 = v_r^2 + v_\phi^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$$

stets konstant, d.h.

$$\dot{\phi}(t) = \frac{\sqrt{c^2 - \dot{r}^2(t)}}{r(t)} = \frac{c \sqrt{1 - \cos^2 \frac{ct}{R}}}{R \sin \frac{c}{R}t} = \frac{c}{R}.$$

Daraus folgt eine lineare Abhängigkeit des Winkels von der Zeit:

$$\phi(t) = \frac{c}{R}t.$$

Zum Zeitpunkt des Urknalls hat das Weltall wegen

---

<sup>2</sup> Die Azimutalgeschwindigkeit sehen wir in der Rotverschiebung nicht.

## Physikaufgabe 97

---

$$r(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \dot{r}(0) = c, \quad \dot{\varphi}(0) = \frac{c}{R}$$

nur radiale kinetische Energie, die aber erhalten bleibt:

$$mc^2 = m\dot{r}(0)^2 + mr(0)^2 \dot{\varphi}(0)^2.$$

Das maximale Alter  $T$  des Universums erhalten wir aus der Forderung, daß nach Durchlaufen einer Weltperiode die Weltlinie wieder in der Singularität verschwinden muß, d.h.

$$r(T) = R \sin \frac{cT}{R} = 0.$$

Da die nächste Nullstelle des Sinus bei  $\pi$  liegt, beträgt die Dauer einer Weltperiode

$$T = \frac{\pi R}{c}.$$

Danach hat der Azimutwinkel einer Weltlinie den Wert

$$\varphi(T) = \frac{cT}{R} = \pi$$

zurückgelegt,<sup>3</sup> und die Radialgeschwindigkeit beträgt

$$\dot{r}(T) = c \cos \frac{cT}{R} = -c.$$

Das All stürzt also radial mit Lichtgeschwindigkeit in die nächste Singularität hinein. Zur Zeit des nächsten Urknalls hat das Weltall dann wegen

$$r(T) = 0, \quad \varphi(T) = \pi, \quad \dot{r}(T) = -c, \quad \dot{\varphi}(T) = \frac{\pi}{T}$$

auch wieder nur radiale Energie, die ebenfalls erhalten bleibt:

$$mc^2 = m\dot{r}(T)^2 + mr(T)^2 \dot{\varphi}(T)^2.$$

Die größte Distanz zur Singularität hat die Weltlinie im Punkt der größten Ausdehnung des Alls bei

$$r(T/2) = R \sin \frac{cT}{2R} = R,$$

bei einem Winkel von

$$\varphi(T/2) = \frac{cT}{2R} = \frac{\pi}{2}.$$

Die Radialgeschwindigkeit ist dort gleich null, d.h.

---

<sup>3</sup> Das liegt aber ausschließlich an der Vierdimensionalität der Raumzeit

## Physikaufgabe 97

---

$$\dot{r}(T/2) = c \cos \frac{cT}{2R} = c \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Die gesamte potentielle Energie steckt also im Drehimpuls, und die Energiebilanz sieht wegen

$$r(T/2) = R, \quad \varphi(T/2) = \pi/2, \quad \dot{r}(T/2) = 0, \quad \dot{\varphi}(T/2) = \frac{\pi/2}{T/2}$$

so aus, daß im Umkehrpunkt nur noch Rotationsenergie umgewandelt werden kann, aber keine radiale Expansionsenergie mehr, so daß die Gesamtenergie wegen

$$mc^2 = m\dot{r}(T/2)^2 + mr(T/2)^2 \dot{\varphi}(T/2)^2$$

nur als potentielle Energie erhalten bleiben kann. Anschließend laufen die Weltlinien wieder zusammen, da sich das All ab diesem Punkt nicht mehr weiter ausdehnt, sondern vielmehr wieder zusammenzieht, bis seine größte Kontraktion erreicht ist. Wegen

$$r = R \sin \frac{c}{R} t, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} = c \sin \frac{c}{R} t$$

hat das Weltall auch einen zeitabhängigen Drehimpuls

$$L = mrv_\varphi = mRc \sin^2 \frac{c}{R} t.$$

Aus der Drehimpulserhaltung folgt

$$L(0) = L(T) = mRc \sin^2 \frac{cT}{R} = mRc \sin^2 \pi = 0,$$

d.h. der Drehimpuls in der Singularität ist null. Er ist maximal für

$$\frac{dL}{dt} = mc^2 \sin \frac{2c}{R} t = 0 \quad \text{bzw.} \quad t = \frac{\pi R}{2c} = \frac{T}{2}$$

und besitzt bei  $t = T/2$ , d.h. bei der größten Ausdehnung des Weltalls, wegen

$$\frac{d^2L}{dt^2} = \frac{2mc^3}{R} \cos \frac{cT}{R} = -\frac{2mc^3}{R} < 0$$

ein relatives Maximum. Die Rotationsenergie des Terms

$$v_\varphi = \frac{L}{mr}$$

wird aufgrund des Energieerhaltungssatzes

$$mc^2 = mv_r^2 + mv_\varphi^2 = E$$

in kinetische Radialenergie umgewandelt, wodurch sich der Drehimpuls ändert, i.e.

$$mv_r^2 = E - mv_\varphi^2 = E - \frac{L^2}{mr^2}.$$

## Physikaufgabe 97

---

Nach Ablauf der Weltzeit  $T$  beginnt das Universum sozusagen von neuem, womit alle früheren Informationen gelöscht sind, außer daß die Erhaltungsgrößen immer noch vorhanden sind. Wir können daraus schließen, daß das Universum zwar einen Anfang und ein Ende kennt, aber periodisch wiederkehrt. Ob die Weltlinien bereits im nächsten Zyklus wieder identisch verlaufen oder sich erst nach einer endlichen Zahl von Wiederholungen reproduzieren, kann die Physik derzeit nicht beantworten, das ist aber für uns auch unerheblich. Mit dieser Aufgabe haben wir auf jeden Fall folgendes bewiesen:

- Die Weltlinien entströmen einer Singularität und münden nach Ablauf eines Weltalters auch wieder in diese Singularität.
- In dem anschaulichen Modell eines sich aufblähenden Luftballons beschreiben die Weltlinien Orthodromen auf einer sphärischen Oberfläche.
- Die Energie des Weltalls ist konstant und kann in einen radialen und einen azimuthalen Anteil zerlegt werden.
- Die radiale Energie ist kurz vor und kurz nach dem Urknall maximal, die azimuthale ist null, und der Drehimpuls bleibt während des Urknalls erhalten und ist ebenfalls null.
- Zum Zeitpunkt seiner größten Ausdehnung hat das All Lichtgeschwindigkeit angenommen, aber keine Geschwindigkeitskomponente mehr in radialer Richtung. Statt dessen hat der Drehimpuls seinen maximalen Wert angenommen.
- Anstatt der bisherigen 18 Naturkonstanten haben wir nunmehr 20, vermehrt um den konstanten Schwarzschildradius des Weltalls und das konstante Weltalter. Das Verhältnis dieser beiden Konstanten ist proportional zur Lichtgeschwindigkeit, so daß man die eine ersatzweise durch die andere ausdrücken kann.
- Nichts, weder Strahlung noch Materie, kann über den Rand des Weltalls hinausgelangen, sondern bleibt innerhalb des Schwarzschildradius gefangen. Ein Äußeres des Universums gibt es wegen der vierdimensionalen Raumkrümmung nicht.
- Während des Urknalls polt sich die radiale Ausbreitungsrichtung der Strahlung um, die gesamte Materie besteht zum Zeitpunkt des Urknalls nur noch aus Strahlung, und das Weltall entsteht jedesmal nach Ablauf eines Weltalters aus Strahlung neu,<sup>4</sup> wobei die Zeit periodisch auf null gesetzt wird und jegliche Kausalität durch die kollabierende Raumzeit aufgehoben wird.

Philosophische Betrachtung. Wenn nun die Weltlinien geschlossene Trajektorien darstellen, liegt es nahe, daß diese sich über den periodisch erfolgenden Urknall hinaus fortsetzen könnten. Das hieße, daß sich die Welt unendlich oft wiederholen würde, und daß es den unendlichen Tod gar nicht gibt, auch wenn er sich periodisch immer wieder aufs neue ereignet. Dabei müssen wir annehmen, daß die Welt streng deterministisch verläuft. Wir würden damit also unendlich viele Tode sterben bzw. eigentlich gar keinen. Unser Leben würde sich unendlich oft noch einmal genau so ereignen, wie es verlaufen ist. Eine andere Schlußfolgerung läßt die moderne Physik derzeit nicht zu.

---

<sup>4</sup> Auch wenn das All für die nächsten 380.000 Jahre dunkel ist