Aufgabe: Behandeln Sie das All als Schwarzen Körper, berechnen Sie seine Masse und daraus den Radius und das Alter des Universums und die Größe der Vakuumpolarisation.

Lösung: Integriert man die spektrale Energiedichte der Hohlraumstrahlung

$$U_\nu(\nu,T)=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

über alle Frequenzen ν, so erhält man die Gesamtenergiedichte

$$U(T)=\int_0^\infty U_\nu(\nu,T)d\nu=\frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty\frac{\nu^3d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}=\frac{8\pi k^4T^4}{c^3h^3}\int_0^\infty\frac{x^3}{e^x-1}dx,$$

wobei h das Plancksche Wirkungsquantum, k die Boltzmann-Konstante, c die Lichtgeschwindigkeit und T die absolute Temperatur ist. Wegen

$$\int_0^\infty\frac{x^3}{e^x-1}dx=\frac{\pi^4}{15}$$

beträgt die Energiedichte eines Hohlraumstrahlers

$$U(T)=\frac{8\pi^5k^4T^4}{15c^3h^3}=\sigma^*T^4,$$

wobei

$$\sigma^*=\frac{8\pi^5k^4}{15c^3h^3}=7{,}56\cdot10^{-16}\,\frac{\mathrm{Ws}}{\mathrm{m^3K^4}}.$$

In jedem sphärischen Volumenelement $dV=4\pi r^2dr$ des Alls, wobei r dessen Abstand von der Singularität ist, befindet sich demnach eine Energie von

$$U(T)dV=4\pi\sigma^*T^4r^2dr.$$

Betrachten wir das Weltall als rotierende Kugel mit Schwarzschildradius R und Drehimpuls L, so ergibt sich eine Energie von

$$E=4\pi\int_0^R U(T)r^2dr=\frac{4\pi}{3}R^3\sigma^*T^4.$$

Den Schwarzschildradius eines rotierenden Schwarzen Lochs erhalten wir aus der Beziehung

$$R=\frac{\gamma M}{c^2}+\sqrt{\frac{\gamma^2M^2}{c^4}-\frac{L^2}{M^2c^2}},$$

wobei M die Gesamtmasse ist und γ die Gravitationskonstante. Wir nehmen an, daß die Singularität mit maximaler Rotationsgeschwindigkeit rotiere, d.h.

$$L = \frac{\gamma M^2}{c} \quad \text{bzw.} \quad R = \frac{\gamma M}{c^2}.$$

Setzen wir diesen Wert in die Energie der Hohlraumstrahlung ein, so ergibt sich

$$E = \frac{4\pi}{3} \frac{\gamma^3 M^3}{c^6} \sigma^* T^4.$$

Eliminieren wir noch die Energie mittels $E = Mc^2$, können wir die Masse des Universums nach Umformung allein aus der Schwarzkörpertemperatur des Weltalls kurz nach dem Urknall berechnen. Diese Hintergrundstrahlung wird mit 2,725 Kelvin angegeben.[1] Entsprechend ist

$$M = \sqrt{\frac{3c^8}{4\pi\sigma^*\gamma^3 T^4}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2{,}998^{\,8} \cdot 10^{64}}{4\pi \cdot 7{,}56 \cdot 10^{-16} \cdot 6{,}674^3 \cdot 10^{-33} \cdot 2{,}725^4}}\ \text{kg} = 3{,}54 \cdot 10^{55}\ \text{kg}.$$

Bei dieser Masse beträgt der Schwarzschildradius des Alls

$$R = \frac{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 3{,}54 \cdot 10^{55} \cdot 1{,}057 \cdot 10^{-16}\ \text{Lj}}{2{,}998^2 \cdot 10^{16}} = 2{,}78 \cdot 10^{12}\ \text{Lj} = 2{,}63 \cdot 10^{28}\ \text{m}.$$

Dieser Radius übertrifft den aus dem sichtbaren Alter A_0 von ca. 13,8 Milliarden Lichtjahren abgeleiteten,

$$R_0 = c \cdot A_0 = 2{,}998 \cdot 10^8 \cdot 13{,}8 \cdot 10^9 \cdot 3{,}154 \cdot 10^7\ \text{m} = 1{,}306 \cdot 10^{26}\ \text{m},$$

der einer Masse von lediglich

$$M_0 = \frac{R_0 c^2}{\gamma} = \frac{13{,}8 \cdot 10^9 \cdot 9{,}461 \cdot 10^{15} \cdot 2{,}998^2 \cdot 10^{16}}{6{,}674 \cdot 10^{-11}}\text{kg} = 1{,}76 \cdot 10^{53}\text{kg}$$

entspricht, um zwei Größenordnungen, wohingegen sich, wenn wir den Schwarzschildradius einsetzen, ein Alter von

$$A = \frac{R}{c} = \frac{2{,}63 \cdot 10^{28} \cdot 3{,}171 \cdot 10^{-8}\ \text{a}}{2{,}998 \cdot 10^8} = 2{,}78 \cdot 10^{12}\ \text{a}$$

ergibt, das sind 2,78 Billionen Jahre, so groß ist das wahre Alter des Universums. Auch wenn wir nur 13,8 Milliarden Lichtjahre zurückschauen können,[2] bedeutet das noch lange nicht, daß das Weltall auch vor 13,8 Milliarden Jahren entstanden ist, denn es müßte eigentlich viel älter

[1] Da sich Strahlung mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet, könnte es sein, daß die wahre Hintergrundtemperatur des Doppeluniversums noch bedeutend niedriger liegt, nämlich in der Nähe des absoluten Nullpunkts.
[2] Also in eine relativ späte Zeit des Universums

sein, als der Lichthorizont erkennen läßt.[3] Mit dem gegenwärtigen Wert M_0 ergibt sich nämlich eine nicht sonderlich hohe Schwarzkörpertemperatur von nur

$$T_0 = \sqrt[4]{\frac{3c^8}{4\pi\sigma^*\gamma^3 M_0^2}} = \sqrt[4]{\frac{3\cdot 2{,}998^8\cdot 10^{64}}{4\pi\cdot 7{,}56\cdot 10^{-16}\cdot 6{,}674^3\cdot 10^{-33}\cdot 1{,}76^2\cdot 10^{106}}}\ \mathrm{K} = 38{,}7\ \mathrm{K},$$

die im mittleren Infrarot liegt und für einen neuerlichen Urknall noch viel zu niedrig ist. Aus dem Masseverhältnis

$$\frac{M_0}{M} = \frac{1{,}76\cdot 10^{53}\mathrm{kg}}{3{,}54\cdot 10^{55}\ \mathrm{kg}} = 0{,}497\cdot 10^{-2} \approx 5\cdot 10^{-3}$$

folgt nämlich, daß sich das All bereits mit nahezu Lichtgeschwindigkeit ausdehnt,

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1-\frac{M_0^2}{M^2}} = \sqrt{1-0{,}497^2\cdot 10^{-4}} = 0{,}999998765.$$

Allerdings ist die Lichtgeschwindigkeit noch lange nicht erreicht, weil die 2,78 Billionen Jahre des Weltalters noch nicht verstrichen sind. Das Verhältnis aus reduzierter und Gesamtmasse

$$\frac{M_0}{M} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

muß klarerweise für $v \to c$ auf null absinken:

$$\lim_{v\to c}\frac{M_0}{M} = \lim_{T_0\to\infty}\frac{T^2}{T_0^2} = 0.$$

Mit der weiteren Ausdehnung des Universums muß auch die Schwarzkörpertemperatur T_0 des sichtbaren Universums immer weiter ansteigen, damit der nächste Urknall überhaupt passieren kann.[4] Dazu muß aber die Masse M_0 immer kleiner werden, zumal sie ja kontinuierlich in Strahlung konvertiert wird.[5] Während die Masse M des Doppeluniversums als solche konstant bleibt,[6] nimmt die Masse des aus Materie bestehenden Universums während der Ausdehnung immer weiter ab, bis sie schließlich für $v = c$ den Wert 0 erreicht, während gleichzeitig die Schwarzkörpertemperatur T_0 gegen Unendlich geht. Daraus folgt nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz,

[3] Das heißt, daß die Hubble-Konstante nicht einfach als lineare Abhängigkeit für die Rückextrapolation verwendet werden darf.
[4] Wenn man von einer Energieerhaltung ausgehen will
[5] Strahlung ist sozusagen die Wärmeenergie des Alls, die nicht mehr in andere Energieformen umgewandelt werden kann, es sei denn bei genügend hoher Strahlungsenergie.
[6] Wenn sie nicht noch viel größer ist

$$\lambda = \frac{2897{,}8 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m\,K}}{T_0},$$

daß auch das Planck-Maximum gegen immer kürzere Wellenlängen strebt und dabei sehr viel hochenergetische Gammastrahlung entsteht, womit der Nährboden für den nächsten Urknall bereitet wird. Wir bemerken diesen Anstieg der Strahlungstemperatur nur nicht, weil die „gerade erst“ entstandenen Schwarzen Löcher noch nicht durch Hawking-Strahlung zerfallen sind. Solange das sichtbare All noch nicht seine volle Größe erreicht hat, muß immer noch reichlich Materie in Strahlung konvertiert werden. Diese Expansion muß schon allein aus dem Grund erfolgen, damit die beiden aufgrund der Vakuumpolarisation entstandenen Teiluniversen aus Materie und Antimaterie wieder fusionieren können, denn durch den Gravitationsverlust werden auch die Zentrifugalkräfte schwächer, bis sie schließlich ganz verschwunden sind.[7] Für das Masseverhältnis gilt mit dem für die Vakuumpolarisation gefundenen Ausdruck

$$V(d) = \pi R^2 d\left(1 - \frac{1}{12}\frac{d^2}{R^2}\right),$$

wobei d den Polarisationsabstand angibt, die Gleichung

$$\frac{M_0}{M} = \frac{\rho V(d)}{\rho V(d) + 2\rho\big(V(2R) - V(d)\big) + \rho V(d)} = \frac{V(d)}{2V(2R)},$$

mit

$$V(2R) = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

Der Faktor 2 im Nenner erklärt sich dadurch, daß im Überlappungsbereich wegen des kurzzeitigen Vorhandenseins von Materie und Antimaterie die Dichte doppelt so groß ist. Setzen wir die beiden Volumina ein, erhalten wir ein Masseverhältnis von

$$\frac{M_0}{M} = \frac{3}{8}\frac{d}{R}\left(1 - \frac{1}{12}\frac{d^2}{R^2}\right),$$

aus dem wir durch Umformung eine kubische Gleichung ableiten können:

$$\frac{d^3}{R^3} - 12\frac{d}{R} + 32\frac{M_0}{M} = 0.$$

Von den 3 Lösungen $x \equiv d/R$ dieser Gleichung,

$$x^3 - 12x + 0{,}159 = 0,$$

[7] Damit geht auch der Polarisationsabstand wieder auf null zurück.

scheidet eine aus, weil sie negativ ist, die andere, weil keine Überlappung stattfindet, so daß als einzig physikalisch sinnvolle Nullstelle $d = 0{,}01325R$ übrigbleibt.[8] Setzen wir den Radius des Alls ein, ergibt sich ein Polarisationsabstand von

$$d = 0{,}01325 \cdot 2{,}78 \cdot 10^{12}\ \text{Lj} = 34{,}8 \cdot 10^{9}\ \text{Lj} = 2{,}67 R_0,$$

der die beiden Teiluniversen klar voneinander separiert. Würde das All nicht expandieren[9] und dabei Materie nicht in Strahlung konvertiert, könnte es niemals mehr zu einem Urknall kommen und eine einmalig stattfindende Episode der Welt wäre abgeschlossen. Da es aber nichts Vergängliches gibt,[10] kann sich das All nur durch Wiedergeburt selbst reproduzieren.

[8] Unser materielles Universum besteht also nur aus etwa 1,3 Prozent der Gesamtenergie des Alls.
[9] Wobei es wieder zu einem Überlapp kommt
[10] Jedenfalls ist eine echte Vergänglichkeit niemals nachgewiesen worden

