Home | Startseite | Impressum | Kontakt | Gästebuch

Aufgabe: Zeigen Sie anhand der Entropieänderung während der Expansion des Alls, daß es keinen Unterschied macht, ob das Weltall aus einer oder unendlich vielen Singularitäten besteht, und daß sich Entropie und Energie durch den Urknall nicht ändern.

Beweis: Im Weltall seien Schwarze Löcher im „Lösungsmittel" der Materie gelöst. Anhand der Statistischen Mechanik können wir die Entropieänderung, d.h. die Zunahme der Unordnung als das Ergebnis einer Mischung von Lösungsmittel und gelöstem Stoff bestimmen. Wir nehmen nun gemäß der Flory-Huggins-Theorie an, daß Ansammlungen von Materie und Schwarzen Löchern abwechselnd Gitterpunkte im All belegen, so daß jeder Gitterpunkt entweder von Materie oder von einem Schwarzen Loch besetzt ist. Die Gitterpunkte, die zu Beginn der Expansion noch mit Materie belegt sind, neigen sich dann gegen Ende des Universums ihrem Ende zu.[1]

Sei N_1 die Zahl der Materieansammlungen und N_2 die Zahl der Schwarzen Löcher. Dann gilt mit den Gittervolumenbrüchen

$$\phi_1 = \frac{N_2}{N} \quad \text{und} \quad \phi_2 = \frac{N_2}{N},$$

wobei $N = N_1 + N_2$ die Gesamtzahl aller Gitterpunkte ist, für die Entropieänderung des Alls mit zunehmender Anzahl neu entstandener oder wachsender Schwarzer Löchern die Relation

$$\Delta S = -k\left(N_1 \ln \phi_1 + N_2 \ln \phi_2\right) = -kN\left(\phi_1 \ln \phi_1 + \phi_2 \ln \phi_2\right),$$

wobei k die Boltzmann-Konstante ist. Wegen $\phi_1 + \phi_2 = 1$ folgt mit $\phi \equiv \phi_2$:

$$\Delta S = -kN\left((1-\phi)\ln(1-\phi) + \phi \ln \phi\right).$$

Nehmen wir das Volumen des Alls kugelförmig an, so ergibt sich für einen Radius R ein Volumen von

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

Demgegenüber sei das Durchschnittsvolumen eines Schwarzen Loches gegeben durch

$$V_i = \frac{4\pi}{3} R_i^3,$$

mit dem Radius $R_i = R/N_i$, womit das All aus N_i^3 Gitterpunkten besteht. Dann gilt

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} N_i^3 \left(\frac{R}{N_i}\right)^3 = \frac{4\pi}{3} N_i^3 R_i^3 = N_i^3 V_i.$$

[1] D.h. es ist kein Lösungsmittel mehr vorhanden

Der Volumenbruch ist somit gegeben durch

$$\phi_2 = \frac{V_i}{V} = \frac{1}{N_i^3},$$

woraus für die Mischungsentropie folgt:

$$\Delta S = -kN\left(\left(1-\frac{1}{N_i^3}\right)\ln\left(1-\frac{1}{N_i^3}\right)+\frac{1}{N_i^3}\ln\frac{1}{N_i^3}\right).$$

Kurz nach dem Urknall ist $N_i = 1,$ daher ist $\Delta S = 0.$ Am Ende des Universums kann man von einer sehr großen Zahl von Schwarzen Löchern ausgehen, folglich gilt ebenfalls $\Delta S = 0.$ Die Entropie des Universums ändert sich also durch den Urknall nicht. Gibt es genauso viele Schwarze Löcher wie Materieanhäufungen, ist die Entropieänderung maximal, denn für $\phi_2 = 1/2$ gilt $\Delta S = kN \ln 2.$ Größer kann die Mischungsentropie nicht werden. Sei also

$$\rho(\vec{r}) = m(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

die Dichteverteilung der Materie kurz nach dem Urknall. Dann ist

$$m = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(\vec{r})d^3r = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} m(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)d^3r = m(\vec{r}_0) = m_0$$

die gesamte in der Singularität konzentrierte Masse des Alls. Kurz vor dem Urknall sind dann sämtliche Gitterpunkte durch ein Schwarzes Loch belegt und es gilt für die Dichte

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} m(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}_i).$$

Völlig analog gilt für die Masse im Endstadium des Universums

$$m = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(\vec{r})d^3r = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{N} m(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)d^3r.$$

Diesen Ausdruck können wir weiter umformen in

$$m = \sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} m(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)d^3r = \sum_{i=1}^{N} m(\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^{N} m_i.$$

Wir sehen also, daß die Masse erhalten bleibt, und daß es keinen Unterschied macht, ob sie sich im Zentrum des Alls befindet oder gleichmäßig wie in einem Gitter über dieses verteilt ist. In jedem Fall bleibt das Integral über die Dichteverteilung

$$\rho(\vec{r}) = m(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \sum_{i=1}^{N} m(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

konstant, woraus

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\sum_{i=1}^{N}\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

folgt. Die Energieverteilung von N disjunkten Punktmassen im expandierenden Universum ist kurz vor dem Urknall ausschließlich durch kinetische Energie gegeben:

$$E_{kin}=-\Delta E_{kin}=c^2\sum_{i=1}^{N}\iiint_{V_i}m(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)d^3r=c^2\sum_{i=1}^{N}m_i=mc^2.$$

Kurz nach dem Urknall hingegen ist erst einmal nur potentielle Energie vorhanden:

$$E_{pot}=\Delta E_{pot}=c^2\iiint_{V}m(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)d^3r=m_0c^2=mc^2.$$

Durch den Urknall ändert sich also die Energie des Alls nicht:

$$\begin{aligned}\Delta E=\Delta E_{kin}+\Delta E_{pot}&=-c^2\sum_{i=1}^{N}\iiint_{V_i}m(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)d^3r+c^2\iiint_{V}m(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)d^3r\\&=-c^2\sum_{i=1}^{N}m(\vec{r}_i)+c^2m(\vec{r}_0)=-c^2\sum_{i=1}^{N}m_i+c^2m_0=0,\end{aligned}$$

da völlig unabhängig von der Zahl der Singularitäten stets

$$m=\sum_{i=1}^{N}m_i=m_0$$

gilt,

qed

