Aufgabe: Bestimmen Sie die sogenannte Vakuumpolarisation während des Urknalls, indem Sie zwei gleich große Singularitäten aus Materie und Antimaterie miteinander schneiden, und berechnen Sie den Massenanteil an Materie, der nicht annihiliert wird.

Lösung: Beim Urknall entsteht durch den paarweisen Stoß je zweier hochenergetischer Photonen ein Proton-Antiproton-Paar, das einen elektrischen Dipol bildet. Jeder der beiden punktförmigen Ladungsschwerpunkte stellt eine separate Singularität mit Schwarzschildradius R dar. Aufgrund des Drehimpulses des Weltalls rotiert dieser Dipol um eine dazu senkrechte Achse. Da Proton und Antiproton aufgrund ihrer unterschiedlichen Ladungen entgegengesetzte Rotationsgeschwindigkeiten haben, stellen sie paarweise stromführende Leiter dar, die sich gegenseitig abstoßen und die daher eine Zentrifugalkraft erzeugen, wodurch sich das Weltall ausdehnt. Diese Zentrifugalkraft wird durch die anziehende Coulombkraft abgebremst. Wenn das Weltall seine maximale Größe erreicht hat und die Drehgeschwindigkeit sich ihrem Minimum nähert, überwiegt schließlich die Coulombkraft zwischen den Resten an Materie und Antimaterie und die beiden Universen vernichten sich gegenseitig. Da das Antiuniversum außerhalb des Schwarzschildradius des eigenen Universums liegt, können wir es nicht sehen. Kraftwirkungen können indes den Schwarzschildradius überwinden. Betrachten wir zur Herleitung der Massebeziehung Abb. 1.

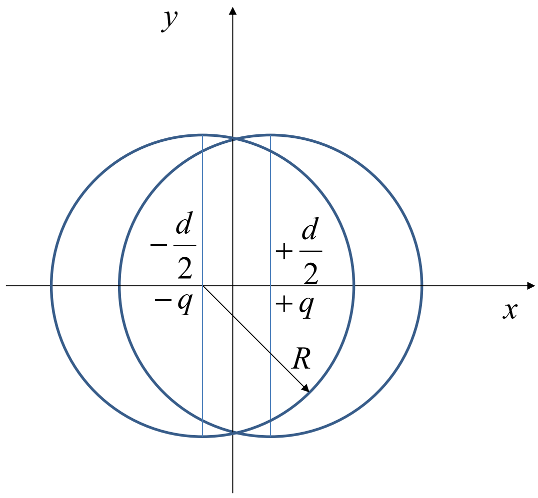

Abbildung 1. Die beiden Teiluniversen aus Materie und Antimaterie bilden bei ihrer Entstehung einen Dipol aus

Nach dem Urknall liegen die Mittelpunkte der beiden kugelförmigen Singularitäten symmetrisch zum Ursprung haben einen Abstand d zueinander, den wir längs der x-Achse auftragen. Der durch die Ladungstrennung entstehende Dipol stellt die sogenannte Vakuumpolarisation dar.[1] Diejenigen Proton-Antiproton-Paare, welche innerhalb des Bereichs liegen, in dem die

[1] Vakuum ist hierfür eigentlich nicht der richtige Ausdruck, da in einer Singularität kein Raum vorhanden ist, in dem sich ein Vakuum befinden könnte.

beiden Singularitäten überlappen, annihilieren sogleich nach ihrer Entstehung, während die außerhalb des Überlappungsbereichs liegenden als Materie und Antimaterie überleben und das Weltall und sein Paralleluniversum bilden.[2]

Wir verwenden im folgenden für die Herleitung der Masse, aus der jedes der beiden Teiluniversen besteht, die Guldinsche Regel für Rotationskörper. Die Gleichung der oberen Randkurve der rechten Schnittfläche, in der sich die Materie befinde, lautet

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{R^2-\left(x-\dfrac{d}{2}\right)^2} & \text{für} \quad 0\le x\le R+\dfrac{d}{2},\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}$$

während die untere Randkurve des begrenzenden Flächenstücks gegeben ist durch

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{R^2-\left(x+\dfrac{d}{2}\right)^2} & \text{für} \quad 0\le x\le R-\dfrac{d}{2},\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Im Nullpunkt des Schwerpunktsystems gilt

$$f(0)=g(0)=\sqrt{R^2-\frac{d^2}{4}}.$$

Nach der zweiten Guldinschen Regel ist das Volumen der außerhalb des Schwarzschildradius der Antimaterie befindlichen Materie gegeben durch

$$V=\pi\int_0^{R+d/2}\left([f(x)]^2-[g(x)]^2\right)dx$$

bzw. wenn wir die Randkurven einsetzen durch

$$V=\pi\int_0^{R+d/2}\left(R^2-\left(x-\frac{d}{2}\right)^2\right)dx-\pi\int_0^{R-d/2}\left(R^2-\left(x+\frac{d}{2}\right)^2\right)dx.$$

Lösen wir die Integrale auf, verbleibt folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned}V&=\pi\left(R^2-\frac{d^2}{4}\right)\int_0^{R+d/2}dx-\pi\int_0^{R+d/2}x^2dx+\pi d\int_0^{R+d/2}x\,dx\\&-\pi\left(R^2-\frac{d^2}{4}\right)\int_0^{R-d/2}dx+\pi\int_0^{R-d/2}x^2dx+\pi d\int_0^{R-d/2}x\,dx.\end{aligned}$$

Die Ausführung der Integrationen ergibt

[2] Dieses Paralleluniversum besteht zu hundert Prozent aus Antimaterie und ist der Anschauung nicht zugänglich, aber es muß aus Energieerhaltungsgründen existieren.

$$V = \pi\left(R^2 - \frac{d^2}{4}\right)\left(R + \frac{d}{2}\right) - \frac{1}{3}\pi\left(R + \frac{d}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}\pi d\left(R + \frac{d}{2}\right)^2$$
$$- \pi\left(R^2 - \frac{d^2}{4}\right)\left(R - \frac{d}{2}\right) + \frac{1}{3}\pi\left(R - \frac{d}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}\pi d\left(R - \frac{d}{2}\right)^2.$$

Fassen wir zusammen, erhalten wir vereinfacht

$$V = 2\pi d R^2 + \frac{1}{3}\pi\left[\left(R - \frac{d}{2}\right)^3 - \left(R + \frac{d}{2}\right)^3\right].$$

Mittels der binomischen Formeln

$$\left(R \pm \frac{d}{2}\right)^3 = R^3 \pm R^2 d + \frac{d^2}{4}R \pm R^2\frac{d}{2} + R\frac{d^2}{2} \pm \frac{d^3}{8}$$

lautet das endgültige Resultat

$$V(d) = \pi R^2 d\left(1 - \frac{1}{12}\frac{d^2}{R^2}\right).$$

Setzen wir konstante Dichte voraus, so bliebe bei maximalem Dipolabstand $2R$ die gesamte Masse erhalten:

$$\Delta M(2R) = M.$$

Selbst wenn der Dipolabstand nur gleich dem Radius der Singularität wäre, wären immer noch drei Viertel der Masse des Universums vorhanden,

$$\Delta M(R) = \frac{11}{16}M \approx \frac{3}{4}M,$$

bei halbem Radius

$$\Delta M(R/2) = \frac{47}{96}\frac{3}{4}M \approx \frac{3}{8}M$$

und bei einem Viertelradius

$$\Delta M(R/4) = \frac{191}{768}\frac{3}{4}M \approx \frac{3}{16}M.$$

Allgemein gilt also bei 2^n-Teilung des Dipolabstands die Formel

$$\Delta M_n\left(\frac{R}{2^n}\right) = \frac{3}{2^{n+2}}M.$$

Wie groß der Anteil an Materie beim Urknall war, ist nicht bekannt. Auch über die Größe der Vakuumpolarisation läßt sich nichts aussagen. Folglich kann auch über die Größe des Dipolmoments nur spekuliert werden. Sicher scheint zu sein, daß von der ursprünglich vorhandenen Energie nur ein Bruchteil in Materie und Antimaterie konvertiert worden ist, während der annihilierte restliche Teil als dunkle Energie im Nichts vor sich hin schlummert.

