Aufgabe: Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit des Weltalls anhand eines rotierenden quantenmechanischen Teilchens.

Lösung: Wir betrachten das Problem vereinfachend für einen rotierenden Massenpunkt der Masse m. An den grundlegenden physikalischen Verhältnissen ändert sich dadurch nichts. Zunächst hat dieser Massenpunkt einen Drehimpuls

$$L = mrv_\varphi = mr^2\omega,$$

wobei v_φ die Geschwindigkeit im Azimut, r der Radius und ω die Winkelgeschwindigkeit ist. Mit der Gesamtgeschwindigkeit des Alls

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2}$$

ergibt sich eine Gesamtenergie von

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(r),$$

wobei

$$V(r) = -\gamma\frac{mM}{r}$$

die potentielle Energie ist, M die Masse des Universums und γ die Gravitationskonstante. Setzen wir die genannten Größen in den Ausdruck für die Energie ein, so ergibt sich

$$E = \frac{1}{2}m\left(v_r^2 + v_\varphi^2\right) - \gamma\frac{mM}{r}$$

wobei

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\omega.$$

Der Ausdruck für die Energie lautet damit

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\right) - \gamma\frac{mM}{r}.$$

Wenn wir davon ausgehen, daß der Drehimpuls beim Urknall erhalten bleibt, so speist sich dieser aus der Gravitation:

$$m^2r^4\omega^2 = 2\gamma m^2Mr.$$

Weil der Radius in der Singularität bei maximaler Masse gleich null ist, muß die schwere Masse M bei maximaler Ausdehnung des Alls auf null abgenommen haben. Die Energie ändert sich durch den Urknall nicht, d.h. es gilt

$$2\gamma M\frac{1}{r} - \dot{r}^2 = r^2\omega^2.$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit dem Quadrat der Massen und dem Quadrat des Radius, so erhalten wir das Quadrat des Drehimpulses:

$$\left(2\gamma\frac{M}{r}-\dot{r}^2\right)m^2r^2=m^2r^4\omega^2=L^2.$$

Bei quasi-unendlicher Ausdehnung des Universums ist $\dot{r}=c,$ d.h. die Geschwindigkeit ändert sich nicht mehr und es gilt

$$\frac{2\gamma M}{r}-c^2=r^2\omega^2 \quad \text{bzw.} \quad \omega=\sqrt{\frac{2\gamma M}{r^3}-\frac{c^2}{r^2}}.$$

Da der Ausdruck unter der Wurzel stets positiv sein muß, würde folgen, daß der Radius *R* des Alls den Grenzwert

$$R\le\frac{2\gamma M}{c^2}$$

nicht überschreiten kann. Damit hätte das All einen Durchmesser *D*, der nicht größer werden kann als

$$D=2R=\frac{4\gamma M}{c^2}.$$

Eine Ausdehnung des Alls ist daher nur möglich bis zu einer gewissen Grenze, denn nur dann kann auch die Winkelgeschwindigkeit null werden:[1]

$$\omega=\lim_{r\to R}\sqrt{\frac{2\gamma M}{R^3}-\frac{c^2}{R^2}}=0.$$

In der Singularität, wenn $\dot{r}=0,$ d.h. wenn

$$2\gamma Mm^2r=m^2r^4\omega^2=L^2$$

bzw.

$$\omega=\sqrt{\frac{2\gamma M}{r^3}},$$

rotiert das All sozusagen unendlich schnell:[2]

$$\omega=\lim_{r\to 0}\sqrt{\frac{2\gamma M}{r^3}}=\infty.$$

Das Weltall hat dann einen Radius

$$r=\frac{L^2}{2\gamma Mm^2}$$

[1] Das muß sie auch, weil die Raumkrümmung auf null abnimmt.
[2] Die Raumkrümmung ist in der Singularität maximal.

bzw. wegen $E = \hbar\omega$ und $L = \hbar$ für ein quantenmechanisches Teilchen einen verschwindenden Durchmesser

$$d = 2r = \frac{L^2}{\gamma M m^2} = \frac{L^2}{E^2}\frac{c^4}{\gamma M} = \frac{c^4}{\gamma M \omega^2}.$$

Wegen der Konstanz des Drehimpulses ist die Winkelgeschwindigkeit in der Singularität quasi unendlich, bei unendlicher Ausdehnung des Raums dagegen null. In dem letzten Ausdruck ist die Lichtgeschwindigkeit wieder vorhanden, aber das rührt nur daher, daß wir die Masse eines quantenmechanischen Teilchens durch seine Energie ersetzt haben. Aus Gründen der Drehimpulserhaltung muß also die schwere Masse bei maximaler Raumausdehnung vollständig verschwunden sein, auch wenn sie nach Albert Einstein gleich der trägen Masse ist:

$$\lim_{M \to 0} D = \frac{4\gamma}{c^2} \lim_{M \to 0} M \to 0.$$

Das Weltall endet also wieder als Singularität.

