

Aufgabe: Im Ruhesystem der Singularität fliege die Materie ab dem Zeitpunkt des Urknalls in radialer Richtung symmetrisch von der Singularität weg. Beschreiben Sie die Bewegung in einem rotierenden Bezugssystem, welches dieselbe Singularität als Ursprung besitzt, und berechnen Sie in diesem System die Raumkrümmung. Begründen Sie, warum sich das Licht im rotierenden Bezugssystem niemals geradlinig ausbreiten kann.

Lösung: Wir verlegen die Drehrichtung in die x - y -Ebene und beschreiben zunächst in einem um die z -Achse rotierenden beschleunigten Bezugssystem die Bahnkurve einer sich im Ruhesystem mit konstanter Geschwindigkeit in radialer Richtung bewegenden Galaxie. Die Bewegung erfolge kräftefrei mit konstanter Geschwindigkeit v_r längs der x -Achse des gestrichenen Systems (siehe Abb. 1).

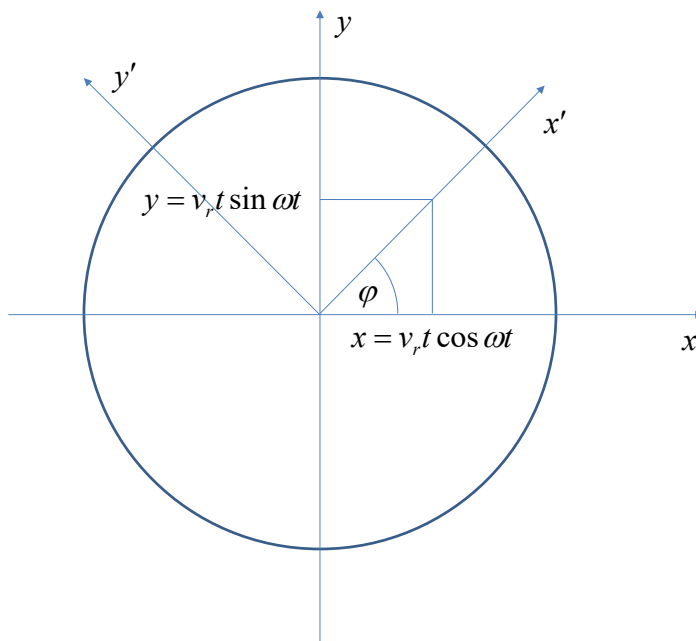


Abbildung 1. Kräftefreie Bewegung längs der x -Achse des gestrichenen Bezugssystems

In dem im Uhrzeigersinn rotierenden ungestrichenen System lauten die Koordinaten der Bewegung

$$x = v_r t \cos \omega t \quad \text{und} \quad y = v_r t \sin \omega t,$$

wobei ω die Kreisfrequenz aufgrund des Drehimpulses des rotierenden Weltalls ist.¹ Der radiale Abstand der Galaxie im bewegten System ist damit genauso groß wie im unbewegten, nämlich

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = v_r t.$$

¹ Im System der Singularität gibt es keinen Bahndrehimpuls, weil Ort und Geschwindigkeit jedes Massenpunkts stets kollinear sind. Zusätzlich müssen sich die Drehimpulse sämtlicher Massenpunkte auf jeder Kreisoberfläche um die Singularität stets aufheben.

Physikaufgabe 91

Die zeitlichen Ableitungen der Ortskoordinaten lauten im bewegten Bezugssystem wie folgt:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_r \cos \omega t - v_r \omega t \sin \omega t, \\ \dot{y} &= v_r \sin \omega t + v_r \omega t \cos \omega t.\end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit im rotierenden Bezugssystem ergibt sich damit aus der Beziehung

$$v = v_r \sqrt{1 + \omega^2 t^2},$$

wobei die Azimutalbewegung mit der Geschwindigkeit $v_\varphi = v_r \omega t$ stattfindet. Entsprechend erhalten wir die zweiten Ableitungen nach der Zeit:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\omega^2 v_r t \cos \omega t - 2\omega v_r \sin \omega t, \\ \ddot{y} &= -\omega^2 v_r t \sin \omega t + 2\omega v_r \cos \omega t.\end{aligned}$$

Die Beschleunigung im bewegten Bezugssystem hängt ebenfalls explizit von der Zeit ab:²

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = 2\omega v_r \sqrt{1 + \frac{1}{4} \omega^2 t^2}.$$

Radial- und Azimutalkomponente lauten daher wie folgt:

$$a_r = 2\omega v_r \quad \text{bzw.} \quad a_\varphi = v_r \omega^2 t.$$

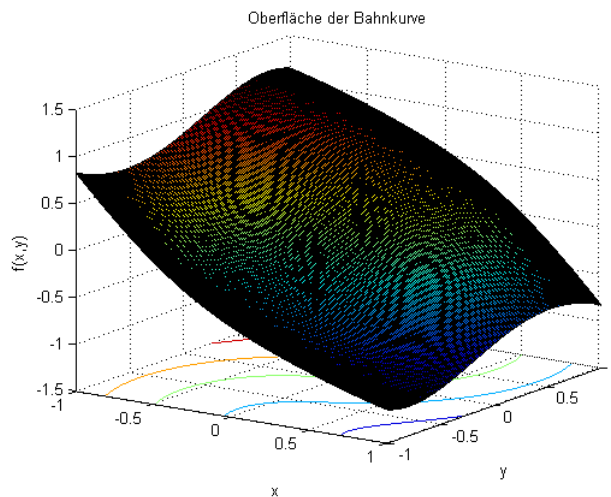


Abbildung 2. Implizite Darstellung der Bahngleichungen einer Galaxie im rotierenden Bezugssystem des Weltalls

Mithin ergeben sich im beschleunigten Bezugssystem Bewegungsgleichungen wie für einen ungedämpften harmonischen Oszillator mit antreibender Kraft:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega^2 x &= -2\omega v_r \sin \omega t, \\ \ddot{y} + \omega^2 y &= 2\omega v_r \cos \omega t.\end{aligned}$$

² Das ist der Grund für die beobachtete größere Rotverschiebung älterer Galaxien.

Physikaufgabe 91

Substituieren wir die Zeit, so erhalten wir die Bahnkurve

$$\frac{y}{x} = \tan \omega t = \tan \frac{\omega \sqrt{x^2 + y^2}}{v_r}.$$

Damit können wir eine Niveaulinienfläche definieren, wie sie Abb. 2 zeigt. Die Gleichung der Bahnkurve im rotierenden Bezugssystem lautet in impliziter Schreibweise

$$f(x, y) = y \cos \frac{\omega \sqrt{x^2 + y^2}}{v_r} - x \sin \frac{\omega \sqrt{x^2 + y^2}}{v_r} = 0.$$

Diese Kurvenschar besitzt einen Wendepunkt für $x = y = 0$, weil dort weder eine Azimutalgeschwindigkeit noch eine Tangentialbeschleunigung anliegt (siehe Konturlinien in Abb. 3).

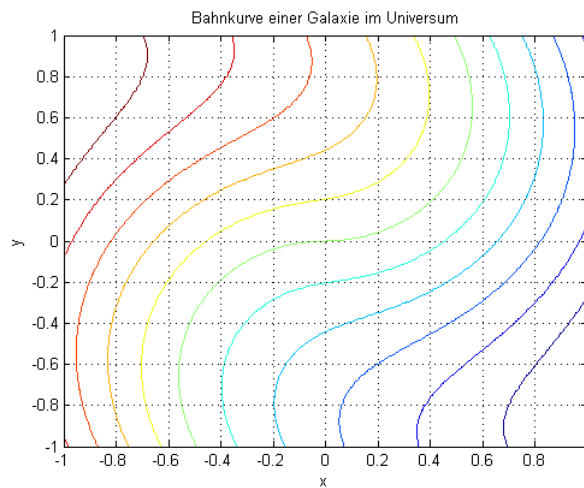


Abbildung 3. Konturlinien der impliziten Bahnkurven von Galaxien im Universum

Zur Ermittlung der relativen Extremwerte der Funktion f bestimmen wir zunächst die Lösungen von

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = - \left[1 + \frac{\omega}{v_r} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] \sin \frac{\omega \sqrt{x^2 + y^2}}{v_r} - \frac{\omega}{v_r} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{\omega \sqrt{x^2 + y^2}}{v_r} = 0,$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = - \frac{\omega}{v_r} \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \frac{\omega \sqrt{x^2 + y^2}}{v_r} + \left[1 - \frac{\omega}{v_r} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] \cos \frac{\omega \sqrt{x^2 + y^2}}{v_r} = 0.$$

Der Ort der waagrechten Tangenten lässt sich mit Hilfe der impliziten Gleichung

$$\tan \frac{\omega \sqrt{x^2 + y^2}}{v_r} = - \frac{\omega}{v_r} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{\omega}{v_r} xy} = \frac{v_r}{\omega} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{\omega}{v_r} xy}{y^2}$$

Physikaufgabe 91

herleiten. Dazu wandeln wir diese in die algebraische Bestimmungsgleichung

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{\omega}{v_r} xy\right)\left(\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{\omega}{v_r} xy\right) + \left(\frac{\omega}{v_r}\right)^2 x^2 y^2 = x^2 + y^2 = 0$$

um, deren einzige Lösung durch $x = y = 0$ gegeben ist. Die zweiten partiellen Ableitungen der Funktion f erhalten wir unter Zuhilfenahme der partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}, & \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{x^3 + 2xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}\end{aligned}$$

und ihren Entsprechungen in y :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= \left[-\frac{\omega}{v_r} \frac{2x^3 + 3xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} - \left(\frac{\omega}{v_r}\right)^2 \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right] \cos \frac{\omega \sqrt{x^2 + y^2}}{v_r} \\ &\quad - \left[\frac{\omega}{v_r} \frac{y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} - \left(\frac{\omega}{v_r}\right)^2 \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right] \sin \frac{\omega \sqrt{x^2 + y^2}}{v_r}, \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} &= \left[-\frac{\omega}{v_r} \frac{2y^3 + 3yx^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} + \left(\frac{\omega}{v_r}\right)^2 \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right] \sin \frac{\omega \sqrt{x^2 + y^2}}{v_r} \\ &\quad - \left[\frac{\omega}{v_r} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} + \left(\frac{\omega}{v_r}\right)^2 \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right] \cos \frac{\omega \sqrt{x^2 + y^2}}{v_r}, \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} &= \left[-\frac{\omega}{v_r} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} + \left(\frac{\omega}{v_r}\right)^2 \frac{yx^2}{x^2 + y^2} \right] \sin \frac{\omega \sqrt{x^2 + y^2}}{v_r} \\ &\quad + \left[-\frac{\omega}{v_r} \frac{y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} - \left(\frac{\omega}{v_r}\right)^2 \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right] \cos \frac{\omega \sqrt{x^2 + y^2}}{v_r}.\end{aligned}$$

Die gemischten Ableitungen sind identisch:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}.$$

Anhand der Definitionen

$$F_x \equiv \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad F_y \equiv \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \quad F_{xx} \equiv \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \quad F_{xy} \equiv \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad F_{yy} \equiv \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$$

Physikaufgabe 91

können wir somit die Raumkrümmung gemäß folgender Gleichung bestimmen:

$$K(x, y) = \frac{-F_y^2 F_{xx} + 2F_x F_y F_{xy} - F_x^2 F_{yy}}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}^3}.$$

Für das praktische Rechnen ist es besser, die dimensionslose Größe

$$\Phi(x, y) = \kappa \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{\omega}{v_r}$$

einzuführen. Dann sind die ersten partiellen Ableitungen gegeben durch

$$F_x(x, y) = - \left[1 + \frac{\kappa^2 xy}{\Phi(x, y)} \right] \sin \Phi(x, y) - \frac{\kappa^2 x^2}{\Phi(x, y)} \cos \Phi(x, y),$$
$$F_y(x, y) = - \frac{\kappa^2 y^2}{\Phi(x, y)} \sin \Phi(x, y) + \left[1 - \frac{\kappa^2 xy}{\Phi(x, y)} \right] \cos \Phi(x, y),$$

und die zweiten partiellen Ableitungen lauten

$$F_{xx}(x, y) = \left[-\frac{2x^3 + 3xy^2}{\Phi(x, y)^3} - \frac{x^2 y}{\Phi(x, y)^2} \right] \kappa^4 \cos \Phi(x, y) - \left[\frac{y^3}{\Phi(x, y)^3} - \frac{x^3}{\Phi(x, y)^2} \right] \kappa^4 \sin \Phi(x, y),$$
$$F_{xy}(x, y) = \left[-\frac{x^3}{\Phi(x, y)^3} + \frac{yx^2}{\Phi(x, y)^2} \right] \kappa^4 \sin \Phi(x, y) + \left[-\frac{y^3}{\Phi(x, y)^3} - \frac{xy^2}{\Phi(x, y)^2} \right] \kappa^4 \cos \Phi(x, y),$$
$$F_{yy}(x, y) = \left[-\frac{2y^3 + 3yx^2}{\Phi(x, y)^3} + \frac{xy^2}{\Phi(x, y)^2} \right] \kappa^4 \sin \Phi(x, y) - \left[\frac{x^3}{\Phi(x, y)^3} + \frac{y^3}{\Phi(x, y)^2} \right] \kappa^4 \cos \frac{\omega \sqrt{x^2 + y^2}}{v_r}.$$

Für den Nenner der Raumkrümmung erhalten wir

$$F_x^2(x, y) + F_y^2(x, y) = 1 + \kappa^2 xy \sin 2\Phi(x, y) + \frac{\kappa^4 x^2 y^2}{\Phi^2(x, y)} + \frac{\kappa^2 (x^2 - y^2)}{\Phi(x, y)} \sin 2\Phi(x, y) - \frac{2\kappa^2 xy}{\Phi(x, y)} \cos 2\Phi(x, y) + \frac{\kappa^4}{\Phi^2(x, y)} (x^4 \cos^2 \Phi(x, y) - y^4 \sin^2 \Phi(x, y))$$

In der Näherung für kleine Winkel folgt daraus

$$F_x^2(x, y) + F_y^2(x, y) \approx 1 + \kappa^2 x^2 + 2\kappa^2(x^2 - y^2) - \kappa^4(x^4 + y^4) + 6\kappa^2 xy\Phi(x, y) + \frac{\kappa^4 x^4}{4}\Phi^2(x, y) - \frac{2\kappa^2 xy}{\Phi(x, y)}.$$

Unsere implizite Funktion f führt in der Näherung für kleine Argumente auf den Ausdruck

$$\frac{y}{x} = \tan \sqrt{x^2 + y^2} \approx \sqrt{x^2 + y^2},$$

so daß sich der Nenner der Krümmung mittels der Beziehung

$$\Phi(x, y) = \kappa \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \kappa \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

weiter vereinfachen läßt zu

$$F_x^2(x, y) + F_y^2(x, y) \approx 1 + 3\kappa^2 x^2 - 2\kappa^2 y^2 - \kappa^4(x^4 + y^4) - \frac{2\kappa y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}},$$

was im Nullpunkt den Wert 1 ergibt. Damit behält der nur vom Ort abhängige Term der Raumkrümmung stets einen endlichen Wert.³

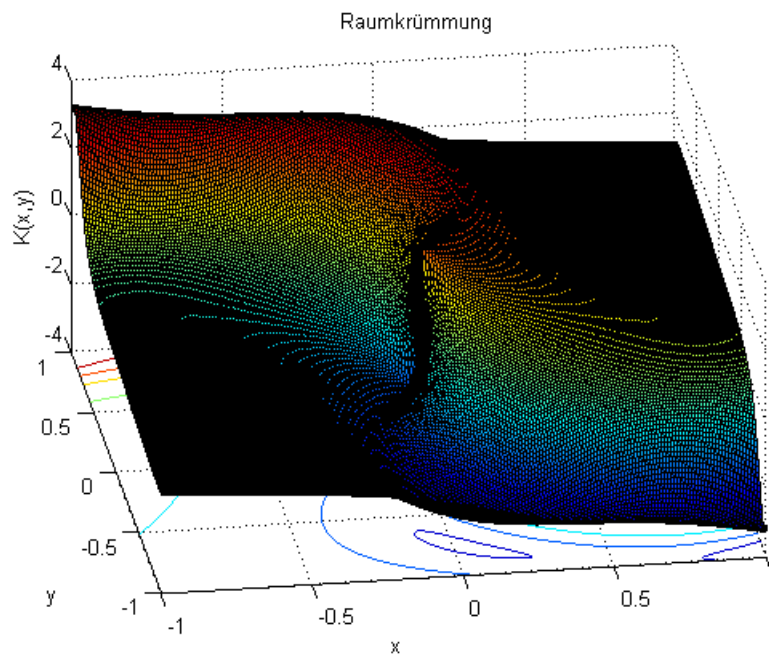


Abbildung 4. Die Raumkrümmung in Flächendarstellung als Funktion der Ortskoordinaten

Die zeitliche Raumkrümmung ist gegeben durch

³ Das gilt allerdings nicht für den Impuls, wie wir noch sehen werden.

$$K(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3} = \frac{\omega^3 v_r^2 t^2 + 2\omega v_r^2}{\sqrt{v_r^2 + v_r^2 \omega^2 t^2}^3} = \frac{\omega}{v_r} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}} \left[1 + \frac{1}{1 + \omega^2 t^2} \right].$$

Sie hängt lediglich vom Vorzeichen der Kreisfrequenz ab,

$$K(0) = \frac{2\omega}{v_r},$$

und hat eine Polstelle in der Singularität für $v_r = 0$ im Fall einer linear beschleunigten Bewegung.⁴ Für große Zeiten wird die Raumkrümmung unabhängig von der Drehrichtung des Alls und geht gegen null:

$$K(t) \approx \frac{1}{v_r t} \left(1 + \frac{1}{\omega^2 t^2} \right) \approx \frac{1}{v_r t}.$$

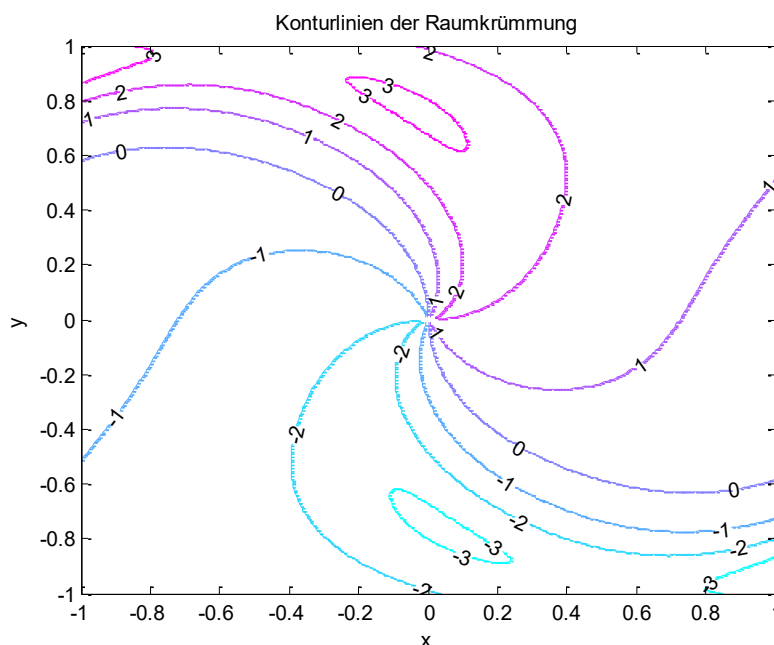


Abbildung 5. Sämtliche Konturlinien mit unterschiedlicher Niveauhöhe münden in dieselbe Singularität

Auch dieser Wert ist in der Singularität unendlich, wenn nämlich das Ende des Universums erreicht ist und die Radialgeschwindigkeit „auf Null zurückspringt.“⁵ Mit

$$\lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{x}{\Phi(x,y)} = \frac{1}{\kappa}$$

erhalten wir in der Singularität die folgenden Grenzwerte für die räumlichen Ableitungen:

⁴ Bei einer kräftefreien Bewegung wird die Gravitation allerdings nicht berücksichtigt.

⁵ In einem zu einer Singularität zusammengeschrunpften Raum hat der Begriff der Geschwindigkeit seine Bedeutung verloren, weil es in einem punktförmigen Objekt keine zeitlichen Abläufe mehr geben kann.

$$F_x(0,0) = -\lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{\kappa^2 x^2}{\Phi(x,y)} = 0, \quad F_y(0,0) = 1 - \lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{\kappa^2 xy}{\Phi(x,y)} = 1.$$

Die zweiten und gemischten Ableitungen sind dort gegeben durch

$$F_{xx}(0,0) = -\lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{2\kappa^4 x^3}{\Phi(x,y)^3} = -2\kappa, \quad F_{yy}(0,0) = -\lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{\kappa^4 x^3}{\Phi(x,y)^3} = -\kappa$$

und

$$F_{xy}(0,0) = -\lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{\kappa^4 x^3}{\Phi(x,y)^3} \sqrt{x^2 + y^2}^3 = 0,$$

so daß von der Krümmung nur der Term

$$K(0,0) = -\frac{F_{xx}}{F_y^3} = 2\kappa$$

überlebt. Dieser stimmt nun mit der zeitlichen Raumkrümmung völlig überein. Die Krümmung des Raums zum Zeitpunkt des Urknalls beträgt demnach

$$K_{\max} = \lim_{v_r \rightarrow 0} \frac{2\omega}{v_r} = \frac{2pc}{\hbar} \lim_{v_r \rightarrow 0} \frac{1}{v_r} = \infty$$

wobei E und m die Gesamtenergie und Masse des Universums sind. Die Expansion des Alls wird augenscheinlich durch die zunehmende Ortsunschärfe hervorgerufen⁶ und setzt sich so lange fort, bis das All Lichtgeschwindigkeit erreicht hat. Dann wird die Krümmung minimal,

$$K_{\min} = \lim_{v_r \rightarrow c} \frac{2\omega}{v_r} = \frac{2E}{\hbar c} = \frac{2p}{\hbar} < \infty,$$

und sie bleibt endlich. Anders ist es im Fall maximaler Raumkrümmung. Zunächst folgt aus den Erhaltungssätzen

$$\Delta E = c\Delta p + p\Delta c = 0, \quad \Delta p = c\Delta m + m\Delta c = 0,$$

indem wir den Impulserhaltungssatz mit c multiplizieren und die Resultate voneinander abziehen, die allgemeine Relation

$$\Delta E - c\Delta p = c(\Delta p - c\Delta m) = 0.$$

Da $v_r \rightarrow 0$ gleichbedeutend ist mit

$$\Delta c \rightarrow -c, \quad \Delta m \rightarrow m, \quad \Delta p \rightarrow p,$$

⁶ D.h. solange sich der Raum ausdehnt, nimmt die Krümmung immer mehr ab, und der Impuls erreicht seinen oberen Grenzwert.

folgt nach einer Reihe von Umformungen

$$\begin{aligned} K_{\max} &= \lim_{v_r \rightarrow 0} \frac{2\omega}{v_r} = \lim_{v_r \rightarrow 0} \frac{2pc}{\hbar v_r} = \lim_{v_r \rightarrow 0} \frac{pc}{\Delta E \Delta t v_r} \\ &= \lim_{\Delta p \rightarrow p} \frac{p}{\Delta p \Delta x} = \lim_{\Delta m \rightarrow m} \frac{m}{\Delta m \Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} = \infty, \end{aligned}$$

und damit hat die Krümmung die Dimension eines reziproken Raums. Gleichzeitig geht $\Delta p = c\Delta m$ gegen p und damit die Krümmung des Raums gegen unendlich, während der Impuls sehr unscharf wird. Wenn die Impulsunschärfe sehr groß wird, erreicht die Ortsunschärfe, da $v_r = 0$ ist, ihren kleinsten und die Krümmung ihren maximalen Wert.

Da $v_r \rightarrow c$ gleichbedeutend ist mit

$$\Delta c \rightarrow 0, \quad \Delta m \rightarrow 0, \quad \Delta p \rightarrow 0,$$

bleibt die Krümmung minimal, d.h. selbst wenn $\Delta x = c\Delta t$ sehr groß werden mag, bleibt

$$K_{\min} = \frac{2E}{\hbar c} = \frac{p}{\Delta E \Delta t} = \frac{pc}{\Delta E c \Delta t} = \frac{p}{\Delta p \Delta x}$$

konstant auf dem gleichen Wert. Die Raumkrümmung wird also nicht unendlich, zumal die Unschärfe der Lichtgeschwindigkeit aus relativistischen Gründen nicht größer werden kann als c . Eine absolut punktförmige Singularität kann es schon wegen der Heisenbergschen Unschärferelation nicht geben, wobei wir die Singularität als unendlich komprimiertes, quantenmechanisches Teilchen angenommen haben. Dennoch hat die maximale Raumkrümmung einen unvorstellbar großen Wert. Es zeigt sich also, daß man die relativistische Krümmung des Raums zur Beschreibung krummliniger Bahntrajektorien gar nicht braucht, weil dafür bereits die durch die Drehimpulserhaltung bedingte Rotation des Weltalls ausreicht. Allerdings ging Einstein bei der Beschreibung seiner Allgemeinen Relativitätstheorie nicht von der Existenz einer Singularität aus, und er kam folglich auch zu keinem endgültigen Ergebnis, weil er die Quantenmechanik ablehnte. Tatsache ist aber, daß den aufgespannten Raum, egal wie groß dieser sein mag, nichts verlassen kann, weder Strahlung noch Materie, weil die schier „unendliche“ Raumkrümmung in der Singularität dem entgegensteht. Unser Universum ist also nichts anderes als eine Blase im Nichts.

Anhang

```
% Krümmung des euklidischen Raums  
clear all
```

```
omega = 1;  
v_r = 1;  
kappa = omega/v_r;
```

```
m = 201;  
for i=1:m  
    xi(i) = -1 + (i-1)*2/(m-1);  
end
```

```
for j=1:m  
    eta(j) = -1 + (j-1)*2/(m-1);  
end
```

```
for i = 1:m  
    for j=1:m  
        x(i,j) = xi(i);  
        y(i,j) = eta(j);  
        Phi(i,j) = kappa*sqrt( x(i,j)^2 + y(i,j)^2 );  
        F_x(i,j) = -(1+kappa^2*x(i,j)*y(i,j)/Phi(i,j))*sin(Phi(i,j))-  
kappa^2*x(i,j)^2/Phi(i,j)*cos(Phi(i,j));  
        F_y(i,j) = (1-kappa^2*x(i,j)*y(i,j)/Phi(i,j))*cos(Phi(i,j))-  
kappa^2*y(i,j)^2/Phi(i,j)*sin(Phi(i,j));  
        F_xx(i,j) = -(2*x(i,j)^3+3*x(i,j)*y(i,j)^2)/Phi(i,j)^3 -  
x(i,j)^2*y(i,j)/Phi(i,j)^2*kappa^4*cos(Phi(i,j))-(y(i,j)^3/Phi(i,j)^3-  
x(i,j)^3/Phi(i,j)^2)*kappa^4*sin(Phi(i,j));  
        F_xy(i,j) = -(x(i,j)^3)/Phi(i,j)^3 +  
x(i,j)^2*y(i,j)/Phi(i,j)^2*kappa^4*sin(Phi(i,j))+(-y(i,j)^3/Phi(i,j)^3-  
x(i,j)*y(i,j)^2/Phi(i,j)^2)*kappa^4*cos(Phi(i,j));  
        F_yy(i,j) = -(2*y(i,j)^3+3*y(i,j)*x(i,j)^2)/Phi(i,j)^3 -  
x(i,j)*y(i,j)^2/Phi(i,j)^2*kappa^4*sin(Phi(i,j))-  
(x(i,j)^3/Phi(i,j)^3+y(i,j)^3/Phi(i,j)^2)*kappa^4*cos(Phi(i,j));  
        K(i,j) = ( -F_y(i,j)^2*F_xx(i,j) + 2*F_x(i,j)*F_y(i,j)*F_xy(i,j) -  
F_x(i,j)^2*F_yy(i,j) )/sqrt( F_x(i,j)^2 + F_y(i,j)^2 )^3;  
    end  
end
```

```
figure(1)  
surf(x,y,K)  
xlabel('x')  
ylabel('y')  
zlabel('K(x,y)')  
title('Raumkrümmung')
```

```
figure(2)  
[C,h] = contour(x,y,K)  
set(h, 'ShowText', 'on', 'TextStep', get(h, 'LevelStep')*1)  
colormap cool
```

```
xlabel('x')  
ylabel('y')  
title('Konturlinien der Raumkrümmung')
```