Aufgabe: Zeigen Sie, daß die Aussage der speziellen Relativitätstheorie, daß nichts in absoluter Ruhe sei, falsch ist. Berechnen Sie die Punkte der Gleichzeitigkeit im vierdimensionalen Raumzeitkontinuum und zeigen Sie, daß Anfang und Ende des Weltalls gleichzeitig passieren.

Beweis: Eine Galaxie, die sich mit Lichtgeschwindigkeit von uns wegbewegt, besitzt in einem bewegten Bezugssystem wie unserer Galaxis nach dem relativistischen Additionstheorem die Geschwindigkeit

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{v}{c^2} u} = -c.$$

Diese Relation können wir nach v auflösen, und wir erhalten unabhängig vom Wert von u dieselbe Geschwindigkeit c, mit der sich unser eigenes System relativ zur Singularität bewegt:

$$v = \frac{u + c}{1 + \frac{u}{c}} = c.$$

Es spielt also keine Rolle, wie schnell sich dabei die andere Galaxis im Inertialsystem der Singularität bewegt. Gesetzt den Fall, ein anderes Objekt würde sich mit Lichtgeschwindigkeit auf uns zubewegen wie beispielsweise das Licht, so würden wir in unserem Inertialsystem die Lichtgeschwindigkeit

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{v}{c^2} u} = c$$

messen. Auch hier ist es egal, wie schnell sich das Licht im System der Singularität bewegt. Lösen wir die Gleichung nach v auf, so erhalten wir unabhängig von der Wahl von u den Wert

$$v = \frac{u - c}{1 - \frac{u}{c}} = -c,$$

der unsere eigene Bewegung im Inertialsystem der Singularität beschreibt. Wir bewegen uns im Vergleich zum umgekehrten Fall lediglich mit Lichtgeschwindigkeit ans andere Ende des Universums, also relativ gesehen rückwärts zum Licht. Alles, was sich weder von uns weg- noch auf uns zubewegt und somit im bewegten System keine Geschwindigkeit hat, d.h.

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{v}{c^2} u} = 0,$$

besitzt demnach im System der Singularität die Geschwindigkeit $v = u.$ Wählen wir nun zwei beliebige Galaxien, die sich relativ zueinander mit Lichtgeschwindigkeit voneinander entfernen, so gilt wegen $c = v(c) = -v(-c)$ nach Einsetzen obiger Ausdrücke

$$\frac{u+c}{1+\frac{u}{c}} + \frac{u-c}{1-\frac{u}{c}} = 0,$$

was auch tatsächlich der Fall ist. Folglich gilt für den Mittelwert $\bar{v} = v(c) + v(-c) = 0,$ und damit ist bewiesen, daß es mindestens ein System gibt, welches sich in absoluter Ruhe befindet. Es ergäbe keinen Sinn, der Singularität eine Geschwindigkeit durch das Nichts zuzuweisen.

Wir berechnen nun aus dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten die Orte der Gleichzeitigkeit im System der Singularität. Für eine Galaxie, die sich mit dem $q$ten Teil der Lichtgeschwindigkeit von uns wegbewegt, also mit $u' \equiv -qc,$ gilt demnach

$$v = \frac{u+qc}{1+\frac{qu}{c}}.$$

Definieren wir

$$p \equiv \frac{u}{c} \quad \text{und} \quad \beta \equiv \frac{v}{c},$$

so folgt

$$\beta = \frac{p+q}{1+pq}.$$

Für $\beta = 0,$ also in der Singularität, liegen die Verhältnisse ziemlich eindeutig, denn dann ist $q = -p$ bzw. $u = u'$ für $u \neq \pm c.$ Für $q = -p$ und $u \to \pm c$ gilt daher der Grenzwert

$$\lim_{p \to \pm 1} \beta = \frac{p-p}{1-p^2} \to 0.$$

d.h. aus $u = \pm c$ folgt nach der speziellen Relativitätstheorie eindeutig $v = 0$. Alles, was sich im System der Singularität mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, wie etwa die eine oder andere Galaxie, mündet wieder in die Singularität, und nicht ins Unendliche. Gleichzeitigkeit herrscht auf allen Radien $\beta = p,$ wenn $q = 0,$ d.h. für $u = v$ und $u' = 0.$ Damit herrscht aber auch Gleichzeitigkeit für alle der Singularität paarweise gegenüberliegenden Punkte, die sich isotrop über alle Raumrichtungen verteilen. Das entspricht einer Sphäre, deren Gleichung durch

$$x^2 + y^2 + z^2 = v^2 t^2$$

gegeben ist, und die einen variablen Radius vt hat. Wenn $v = c$ erreicht ist, ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2,$$

aber das ist gerade der oben diskutierte Fall

$$s^2 = \left(c^2 - v^2\right) \cdot t^2 = 0.$$

Diese Gleichung besitzt genau zwei Lösungen, nämlich für $v = c$, d.h. für $s = 0$, und für $t = v = 0$. Damit beschreibt der vierdimensionale Raum zu Beginn und am Ende seiner Ausdehnung eine Singularität. Alle Galaxien, die von dieser Singularität einen gleich großen Abstand haben, sind gleich alt. Das Universum bläht sich also einem Luftballon gleich mit der Geschwindigkeit v auf, wobei wir immer nur in die Vergangenheit schauen können, und nie in die Zukunft. Daher würden wir eine Blauverschiebung gar nicht sehen. Blicken wir ins All hinaus, sehen wir das Universum zu verschiedenen Zeiten bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten. In Tabelle 1 sind um die Singularität herum einige ausgewählte Geschwindigkeitskombinationen angegeben, für die Gleichzeitigkeit herrscht. Das Vorzeichen spielt dabei keine Rolle. Die Funktion $\beta(p,q)$ ist in Abb. 1 und 2 als Oberflächengrafik dargestellt.

$\beta(p,q)$	$-4/4$	$-3/4$	$-2/4$	$-1/4$	0	$1/4$	$2/4$	$3/4$	$4/4$
$-4/4$	$-32/32$	$-28/28$	$-24/24$	$-20/20$	$-16/16$	$-12/12$	$-8/8$	$-4/4$	0
$-3/4$	$-28/28$	$-24/25$	$-20/22$	$-16/19$	$-12/16$	$-8/13$	$-4/10$	0	$4/4$
$-2/4$	$-24/24$	$-20/22$	$-16/20$	$-12/18$	$-8/16$	$-4/14$	0	$4/10$	$8/8$
$-1/4$	$-20/20$	$-16/19$	$-12/18$	$-8/17$	$-4/16$	0	$4/14$	$8/13$	$12/12$
0	$-16/16$	$-12/16$	$-8/16$	$-4/16$	0	$4/16$	$8/16$	$12/16$	$16/16$
$1/4$	$-12/12$	$-8/13$	$-4/14$	0	$4/16$	$8/17$	$12/18$	$16/19$	$20/20$
$2/4$	$-8/8$	$-4/10$	0	$4/14$	$8/16$	$12/18$	$16/20$	$20/22$	$24/24$
$3/4$	$-4/4$	0	$4/10$	$8/13$	$12/16$	$16/19$	$20/22$	$24/25$	$28/28$
$4/4$	0	$4/4$	$8/8$	$12/12$	$16/16$	$20/20$	$24/24$	$28/28$	$32/32$

Tabelle 1. Werte von v/c als Funktion von p und q

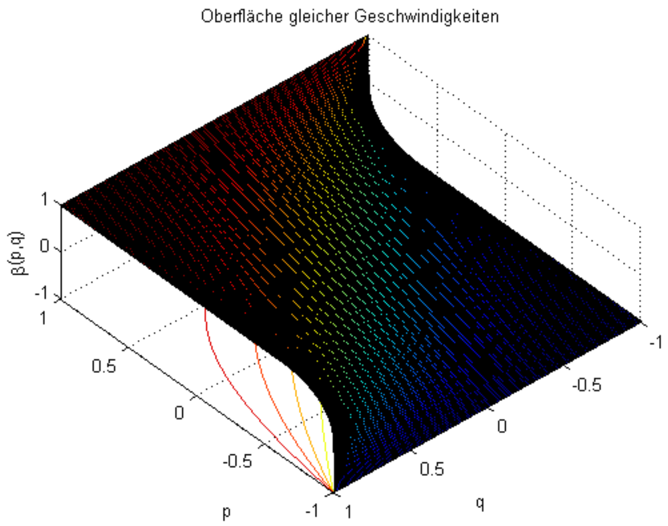

Abbildung 1. Die Expansionsgeschwindigkeit des Raums v als Funktion von u und u'

Die abhängigen Variablen sind die Bewegungen ferner Galaxien einmal im Inertialsystem der Singularität und zum anderen im mit der Geschwindigkeit v bewegten System der eigenen Galaxis. In Abbildung 3 sind die Konturlinien gleicher Geschwindigkeit dargestellt, woraus klar hervorgeht, daß $v = c$ und $v = 0$ im Grenzübergang identisch sind.

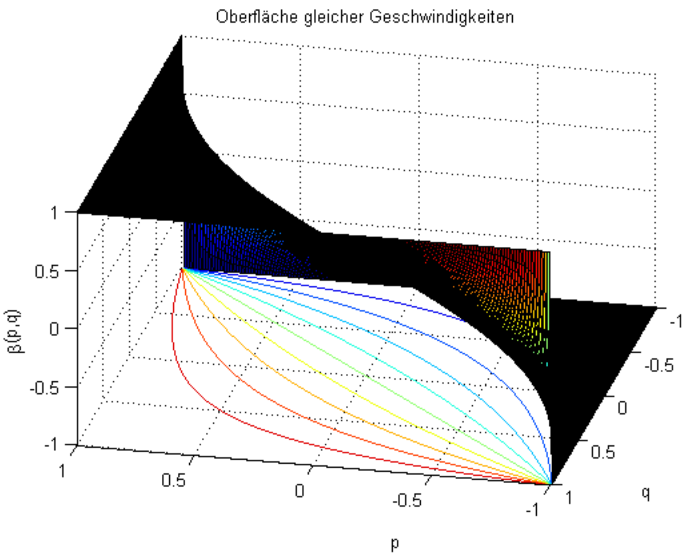

Abbildung 2. Andere Projektion von Abbildung 1

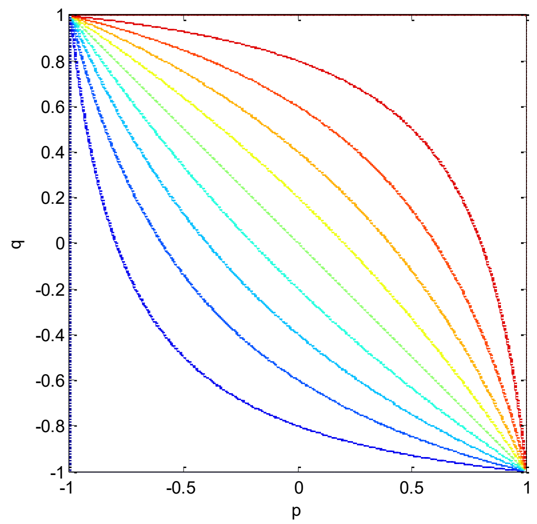

Abbildung 3. Für p+q=0 münden alle Konturlinien in denselben Punkt der Raumzeit

Wir können am Verlauf der Konturlinien erkennen, daß alle Trajektorien in zwei Punkte münden. Dabei ist p maximal, wenn q minimal ist, und umgekehrt. Mit Geschwindigkeiten

$$u'_{\min} = -c \quad \text{und} \quad u'_{\max} = c$$

im bewegten Bezugssystem folgt

$$q_{\max} = -\frac{u'_{\min}}{c} = 1 \quad \text{und} \quad q_{\min} = -\frac{u'_{\max}}{c} = -1.$$

Ferner ergeben sich mit den Geschwindigkeiten

$$u_{\min} = -c \quad \text{und} \quad u_{\max} = c$$

im Ruhesystem die Extremwerte

$$p_{\min} = \frac{u_{\min}}{c} = -1 \quad \text{und} \quad p_{\max} = \frac{u_{\max}}{c} = 1.$$

Für $p = p_{\max}$ und $q = q_{\min}$ ist $\beta = 1,$ das ist die rote Linie im Konturplot. Für $p = p_{\min}$ und $q = q_{\max}$ gilt $\beta = -1,$ das entspricht der blauen Linie. Die rote Linie gilt aber auch für $p = p_{\min}$ und $q = q_{\max}$, also für $\beta = -1,$ ebenso wie die blaue Linie für $p = p_{\max}$ und $q = q_{\min}$ mit $\beta = 1$ gilt. Das liegt am Wesen der Singularität. Genauer gesagt verlaufen die Grenzlinien im Konturplot exakt längs den Seiten eines Quadrats. Die spezielle Relativitätstheorie löst also sozusagen das Problem der Gleichzeitigkeit unter der Annahme einer Lorentz-Transformation. Dabei können keine Unstetigkeiten auftreten, auch nicht in den Ecken, während sich die Singularität im Konturplot als Gerade durch die Abbildung zieht. Auch wenn Einstein ursprünglich nicht von einer Singularität ausging, ist sie dennoch ein Ergebnis seiner speziellen Relativitätstheorie. Das Relativitätsprinzip wird dadurch nicht umgestoßen, nur die Gleichzeitigkeit definiert sich anders, nämlich über gleiche Geschwindigkeiten in einem Ruhesystem.

