Aufgabe: Beweisen Sie anhand der Aussagen der Speziellen Relativitätstheorie, daß wir in einer Singularität leben.

Lösung: Wir suchen zunächst nach den Extremwerten der Zeit in einem mit der Geschwindigkeit v relativ zum Ursprung bewegten Bezugssystem. Finden wir ein relatives Maximum, dann kann keine Zeit größer sein als diese. Sei also $t > 0$ ein konstanter Zeitpunkt in einem Inertialsystems, dann ist

$$t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

die Zeit in einem relativ dazu mit konstanter Geschwindigkeit v bewegten System. Die Zeit im gestrichenen System ist dann nur von den Variablen β und x des unbewegten Systems abhängig. Wir fragen, wo das Maximum im bewegten System bzgl. x und β ist. Dazu bilden wir die partiellen Ableitungen und setzen diese null. Es ist

$$\frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{\beta}{c\sqrt{1-\beta^2}} = 0$$

für $\beta = 0.$ Ferner ist

$$\frac{\partial t'}{\partial \beta} = -\frac{x}{c\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}^3}\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) = \frac{\beta t - \frac{x}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}^3} = 0$$

für $x = vt.$ Die zweiten partiellen Ableitungen lauten

$$\frac{\partial^2 t'}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 t'}{\partial \beta^2} = \frac{t + 2\beta^2 t - 3\beta\frac{x}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}^3\left(1-\beta^2\right)}, \quad \frac{\partial t'}{\partial x \partial \beta} = \frac{\partial^2 t'}{\partial \beta \partial x} = -\frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}^3}.$$

Das ergibt die Funktionaldeterminante im Punkt $(x_0, \beta_0) = (vt, 0)$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 t'}{\partial x^2} & \frac{\partial t'}{\partial x \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 t'}{\partial \beta \partial x} & \frac{\partial^2 t'}{\partial \beta^2} \end{vmatrix}(x_0, \beta_0) = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}^3} \\ -\frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}^3} & \frac{t + 2\beta^2 t - 3\beta\frac{x}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}^3\left(1-\beta^2\right)} \end{vmatrix}(vt, 0)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{c} \\ -\frac{1}{c} & \frac{t - \beta^2 t}{\sqrt{1-\beta^2}^3\left(1-\beta^2\right)} \end{vmatrix} = -\frac{1}{c^2} < 0.$$

Wir haben also ein relatives Maximum bei $t' = t,$ d.h. im bewegten Bezugssystem gibt es keine Zeit, die größer werden kann als die in der Singularität für $x = vt$ und $\beta = 0.$ Das gilt auch für die zeitlichen Differenzen im bewegten Bezugssystem,

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \frac{\beta}{c}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} = t_2 - t_1,$$

womit bewiesen wäre, daß wir in einer Singularität leben. Betrachten wir dagegen die Zeit t als variable Größe, so besitzt die Transformation

$$t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

vom unbewegten ins bewegte System weder ein relatives Maximum noch Minimum, weil t' gemäß seiner Ableitung nach der Zeit

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \neq 0$$

keine waagrechte Tangente besitzt. Mit der zweiten partiellen Ableitung

$$\frac{\partial^2 t'}{\partial t^2} = 0$$

und den gemischten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 t'}{\partial\beta\partial t} = \frac{\partial^2 t'}{\partial t\partial\beta} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}^3} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 t'}{\partial x\partial t} = \frac{\partial^2 t'}{\partial t\partial x} = 0$$

verschwindet die Funktionaldeterminante identisch:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 t'}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 t'}{\partial x\partial t} & \frac{\partial^2 t'}{\partial\beta\partial t} \\ \frac{\partial^2 t'}{\partial t\partial x} & \frac{\partial^2 t'}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 t'}{\partial\beta\partial x} \\ \frac{\partial^2 t'}{\partial t\partial\beta} & \frac{\partial^2 t'}{\partial x\partial\beta} & \frac{\partial^2 t'}{\partial\beta^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}^3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}^3} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}^3} & -\frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}^3} & \frac{t + 2\beta^2 t - 3\beta\frac{x}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}^3(1-\beta^2)} \end{vmatrix} = 0.$$

Für $t \neq 0$ und $x \neq 0$ geht also der Grenzwert

$$\lim_{\beta \to 1} t' = \frac{1}{c} \lim_{\beta \to 1} \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \to 0,$$

weil das infinitesimale Wegdifferential

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2} = \sqrt{d(ct + x)d(ct - x)}$$

nur für $x = \pm ct$ verschwinden kann. Aber auch für $\beta \neq 0$ kann nicht sein, daß für $t \to \infty$ der Grenzwert

$$\lim_{t \to \infty} t' = \frac{1}{c} \lim_{t \to \infty} \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \to \infty$$

geht, weil vorrangig $\beta \to 1$ geht und damit auch der Limes von t' gegen Null. Den Wert Unendlich gibt es in der Physik nicht, er ist eine Erfindung der Mathematik. Auch eine Zeit gibt es im Grunde genommen nicht, es gibt nur Bewegung, und die Bewegung ist die Zeit. Veränderungen nehmen wir als Geschwindigkeiten wahr. Auch der Zeiger einer Uhr bewegt sich nur, weil wir ihn verstellen.

