Aufgabe: Zeigen Sie, daß sich das Weltall nicht unendlich ausdehnen kann.

Beweis: Einstein nahm in seiner Speziellen Relativitätstheorie an, daß sich nichts in absoluter Ruhe befindet. Diese Annahme mag wohl zutreffend sein, aber sie ist abhängig vom Bezugssystem. Unser Bezugssystem, welches wir in den Mittelpunkt unserer Milchstraße verlegen wollen, ist ein bewegtes Bezugssystem, ebenso wie auch all die anderen Galaxien, die aus der Singularität hervorgegangen sind. Zwischen diesen bewegten Bezugssystemen kann niemals Gleichzeitigkeit herrschen. Gleichzeitigkeit ist nur vorstellbar im System der Singularität, und zwar auf jeder Sphäre, welche die Singularität konzentrisch umgibt. Man kann aufgrund von Symmetrieüberlegungen davon ausgehen, daß sich jedes Oberflächenelement auf dieser Sphäre mit der gleichen Ausbreitungsgeschwindigkeit v relativ zur Singularität bewegt. Betrachten wir nunmehr Abb. 1, wo die Situation anschaulich dargestellt ist.

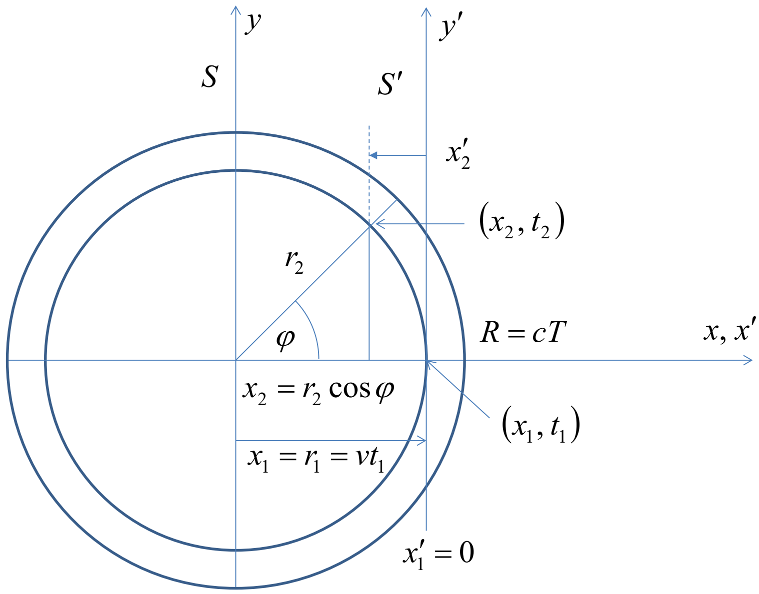

Abbildung 1. Zwei gleichzeitige Ereignisse im System *S* der Singularität und in einem mitbewegten System *S'*

Wenn wir annehmen, daß das Universum einer Singularität entsprungen ist, dann sind alle Galaxien, die sich relativ zueinander mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, gleich alt. Da sich das Universum ausdehnt, gibt es in ihm keine Objekte, die sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, bis auf die Singularität selbst.[1] Nehmen wir nun zwei Galaxien, die den größten derzeit beobachteten Abstand zueinander haben, z.B. unsere eigene und GN-z11, die 13,4 Milliarden Lichtjahre von uns entfernt ist. Im System der Singularität ist für einen Beobachter in der Galaxie GN-z11 seit dem Urknall die gleiche Zeit

$$t = t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2} x'_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

[1] Es würde keinen Sinn ergeben, dem Schwerpunkt des Universums eine von Null verschiedene Bewegung zuzuschreiben.

vergangen wie für einen Beobachter in unserer Galaxis, d.h.

$$t = t_1 = \frac{t_1' + \dfrac{v}{c^2} x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Der Beobachter in der Galaxie GN-z11 glaubt ebenso wie wir, daß unsere Galaxis zu einem sehr frühen Zeitpunkt entstanden sein muß, da keines der beiden Systeme bevorzugt ist. Er ist in seinem System genauso gealtert wie wir, wenn wir uns beide im Teleskop sehen könnten. Die Rotverschiebung

$$z \equiv \frac{\Delta \nu}{\nu} = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} - 1,$$

die wir in unserem System messen können, gestattet die Berechnung von

$$\frac{v}{c} = \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}.$$

GN-z11 bewegt sich relativ zu uns fast mit Lichtgeschwindigkeit, ihr z liegt bei 11,1, daraus folgt die Relativgeschwindigkeit $v/c = 0{,}9864$, das ist beinahe Lichtgeschwindigkeit. Wir nehmen nunmehr im System der Singularität zwei gleichzeitige Ereignisse (x_1, t_1) und (x_2, t_2) an, von denen das erste Ereignis in unserer Galaxie stattfinde und das zweite in einer von uns möglichst weit entfernten Galaxie, die ähnlich alt ist wie die unsrige, z.B. GN-z11. Im Additionstheorem der Geschwindigkeiten nehmen wir vereinfachend an, daß sich die entfernte Galaxie von der unsrigen exakt mit Lichtgeschwindigkeit wegbewegt.

Sei also S das unbewegte System der Singularität. Im relativ dazu mit der Geschwindigkeit v bewegten System des expandierenden Weltalls S' haben die beiden Galaxien die Koordinaten (x_1', t_1') und (x_2', t_2'). Gemäß der Lorentz-Transformation zwischen dem bewegten und dem unbewegten System gilt

$$t_1' = \frac{t_1 - \dfrac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{und} \quad t_2' = \frac{t_2 - \dfrac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Wenn wir die Beschleunigung zunächst außer acht lassen, gilt für die im System des sich mit der Geschwindigkeit v ausdehnenden Raumes gemessene zeitliche Differenz der folgende Zusammenhang mit im System der Singularität stattfindenden Ereignissen:

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \dfrac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{v}{c^2} \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Dabei ist der erste Term wegen der Gleichzeitigkeit $t_2 = t_1$ entfallen. Setzen wir die Ortskoordinaten der beiden Ereignisse in diese Gleichung ein, so ergibt sich

$$t_2' - t_1' = \frac{v}{c^2} \frac{r_1 - r_2 \cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}} = \beta^2 t_1 \frac{1-\cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Für zwei sich diametral $(\varphi = \pi)$ mit annähernd Lichtgeschwindigkeit $(\beta \approx 1)$ voneinander wegbewegende Galaxien erhalten wir in unserer kräftefreien Betrachtung den Grenzwert

$$t_2' - t_1' = 2 \lim_{\beta \to 1} \frac{\beta^2 t_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \to \infty,$$

wobei wir angenommen haben, daß die Zeit t_1 das maximale Alter des Weltalls erreicht hat. Aufgrund der Identität

$$t_2' - t_1' = -\frac{v}{c^2} x_2'$$

messen wir für den Abstand[2] der anderen Galaxie relativ zu unserem bewegten Bezugssystem ebenfalls einen unendlich negativen Wert

$$x_2' = -c \lim_{\beta \to 1} \frac{t_2' - t_1'}{\beta} = -2c \lim_{\beta \to 1} \frac{\beta t_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \to -\infty.$$

Wenn $\beta \approx 1$ ist, entspricht $-x_2$ dem Radius r_1 des Universums im Ruhesystem der Singularität. Da die inverse Zeitdifferenz im bewegten System gleich der Hubble-Konstanten ist, erhalten wir daraus das Alter des Universums zu

$$t_2' - t_1' = \frac{1}{H} = c \frac{3{,}26 \cdot 10^3 \text{ a}}{70{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 13{,}8 \cdot 10^9 \text{ a}.$$

Aus der Beziehung

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

folgt mit $x_2 = -x_1$, $\beta = 1$ und $t_1 = t_2$ für den Bogendurchmesser des jungen Universums

$$d_1 = \pi r_1 = \frac{c}{H} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \approx 0.$$

Da das erste ausgesandte Licht ca. 300 Millionen Jahre nach dem Urknall datiert, legte das Licht in dieser Zeit eine Entfernung von 0,3 Milliarden Lichtjahren zurück. Das sind etwa zwei Prozent des Alters des Universums. Wir verlegen daher die erste Aussendung des Lichts näherungsweise in den Urknall zur Zeit $t = 0$.

[2] In *x*-Richtung

Im folgenden stellen wir die gleiche Betrachtung für ein sich mit konstanter Beschleunigung a bewegendes Bezugssystem an. Aus der Geschwindigkeitsabhängigkeit der gleichförmig beschleunigten Bewegung folgt relativistisch

$$v(t_1') = c \tanh \frac{at_1'}{c} \quad \text{bzw.} \quad \beta = \tanh \frac{at_1'}{c}.$$

Aus den Additionstheoremen für Hyperbelfunktionen folgt

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \cosh \frac{at_2'}{c}.$$

Wegen $x_1' = 0$ ist

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{v}{c^2} x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

und für das Differential gilt

$$dt_1 = \frac{dt_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Dies ergibt integriert im Inertialsystem die Zeit

$$t_1 = \int_0^{t_1'} \frac{d\tau_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{c}{a} \sinh \frac{at_1'}{c}.$$

Die Zeit im bewegten System erhalten wir aus der Umkehrfunktion:

$$t_1' = \frac{c}{a} \operatorname{ar\,sinh} \frac{at_1}{c}.$$

Für das zweite Ereignis im gestrichenen System gilt für das Differential analog

$$dt_2 = \frac{dt_2' + \frac{v}{c^2} dx_2'}{\sqrt{1-\beta^2}} = dt_2' \frac{1 + \frac{v}{c^2} u_2'}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

wobei u_2' die Geschwindigkeit der anderen Galaxie in unserem bewegten Bezugssystem ist. Im Inertialsystem der Singularität gilt für die Geschwindigkeit der sich von uns wegbewegenden Galaxie die trigonometrische Beziehung

$$u_2 = \frac{x_2}{t_2} = \frac{r_2 \cos\varphi}{t_2} = v \cos\varphi.$$

Da sich diese Galaxie relativ zum Koordinatenursprung des Inertialsystems unter dem Winkel φ zur x-Achse unseres bewegten Systems von uns wegbewegt, gilt nach dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten

$$u_2' = \frac{u_2 - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_2} = -\frac{v(1-\cos\varphi)}{1 - \frac{v^2}{c^2}\cos\varphi} = -\frac{\beta(1-\cos\varphi)}{1-\beta^2\cos\varphi}c.$$

Wir behandeln hier nur den Fall $\varphi = \pi.$ Dabei liegt die fliehende Galaxie genau am gegenüberliegenden Ende des Universums. Unter dieser Bedingung ist

$$u_2' = \frac{u_2 - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_2} = -\frac{v(1-\cos\varphi)}{1 - \frac{v^2}{c^2}\cos\varphi} = -\frac{2\beta c}{1+\beta^2}.$$

Für $\beta = 1$ bewegt sich die andere Galaxie also genau mit Lichtgeschwindigkeit von uns weg, d.h. $u_2' = -c.$ Setzen wir diese Geschwindigkeit in das differentielle Wegelement ein, so erhalten wir

$$dt_2 = dt_2' \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta^2}.$$

Wir haben somit folgendes Integral zu lösen:

$$t_2 = \int_0^{t_2'} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta^2} d\tau_2.$$

Mittels

$$v(t_2') = c\tanh\frac{at_2'}{c}$$

ist

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \cosh\frac{at_2'}{c}.$$

Mit Hilfe dieser Substitution können wir elementar integrieren:

$$t_2 = \frac{c}{a}\int_0^{at_2'/c} \frac{\cosh\xi}{1+2\sinh^2\xi}d\xi = \frac{c}{a}\int_0^{\sinh at_2'/c} \frac{d\eta}{1+2\eta^2} = \frac{c}{\sqrt{2}a}\arctan\left(\sqrt{2}\sinh\frac{at_2'}{c}\right).$$

Nach t_2' aufgelöst erhalten wir eine inverse Hyperbelfunktion:

$$t_2' = \frac{c}{a}\operatorname{ar\,sinh}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\frac{\sqrt{2}at_2}{c}\right].$$

Bilden wir nun die zeitliche Differenz der beiden Ereignisse, so ergibt sich

$$t_2' - t_1' = \frac{c}{a}\operatorname{ar\,sinh}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\frac{\sqrt{2}at_1}{c}\right] - \frac{c}{a}\operatorname{ar\,sinh}\frac{at_1}{c}.$$

Dies ist ein gänzlich anderes Ergebnis als im Fall einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit, da die beschleunigte Bewegung allmählich zum Stillstand kommt, die kräftefreie Bewegung bei konstanter Geschwindigkeit dagegen nicht. Setzen wir in den speziell für unseren Fall erhaltenen Ausdruck die Hubble-Konstante ein, die definiert ist durch

$$H \equiv \frac{v}{r} = \frac{vt}{rt} = \frac{a}{v} \approx \frac{a}{c},$$

dann gilt wegen $c = at_1$

$$t_2' - t_1' = \frac{1}{H}\left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\sqrt{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{2}\tan^2\sqrt{2}}\right) - \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right] = \frac{1{,}32}{H}.$$

Daraus können wir bei bekanntem Alter des Universums die Grenzbeschleunigung der Galaxien berechnen. Es ist

$$a = \frac{c}{t_1} = \frac{2{,}9979 \cdot 10^8 \,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{13{,}81 \cdot 10^9 \cdot 3{,}154 \cdot 10^7 \mathrm{s}} = 6{,}88 \cdot 10^{-10} \,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Das ist eine erstaunlich kleine Zahl für die Massenbeschleunigung, aber sie kann auch nicht null werden, sonst wäre das Weltall vor unendlicher Zeit entstanden. Wir können mit Hilfe dieses Ergebnisses auch die Hubble-Konstante neu berechnen. Es ergibt sich ein Wert von

$$H = \frac{1}{t_1} = \frac{3{,}26 \cdot 10^6 \cdot 2{,}9979 \cdot 10^5}{13{,}81 \cdot 10^9} \frac{\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{Mpc}} = \frac{70{,}8 \,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{Mpc}}.$$

Damit läge das wahre Alter des Universums aber auch deutlich höher, nämlich bei

$$t_2' - t_1' = \frac{1{,}32 \cdot 3{,}26 \cdot 10^6 \cdot 2{,}9979 \cdot 10^5 \,\frac{\mathrm{km} \cdot \mathrm{a}}{\mathrm{s}}}{71{,}9 \,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}} = 17{,}94 \cdot 10^9 \text{ a},$$

wobei wir einen noch aktuelleren Wert für die Hubble-Konstante verwendet haben. Da das Licht nicht auf geraden Bahnen läuft, sondern bei einem sich ausdehnenden Universum auf sphärischen Orthodromen,[3] erhalten wir für den Durchmesser des Alls einen Wert von

$$D = \frac{\pi c}{H} = \frac{\pi \cdot 3{,}26 \cdot 10^6 \text{ Lj}}{70{,}8 \,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}} \cdot 2{,}9979 \cdot 10^5 \,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} = 43{,}4 \cdot 10^9 \text{ Lj},$$

wobei wir wieder den Effekt, daß sich das Licht erst 300 Millionen Jahre nach dem Urknall auszubreiten begann, nicht berücksichtigt haben.

Wenn das Universum eine Singularität ist, kann es sich nicht weiter ausdehnen als bis zum Schwarzschildradius, d.h.

[3] Es kann quasi nicht in die Vergangenheit zu kleineren Radien zurück.

$$t_1 \le \frac{R}{c},$$

wobei R der Schwarzschildradius ist. Weder Masse noch Strahlung können diesen Radius überschreiten. Folglich kann auch die Beschleunigung nie kleiner werden als

$$a = \frac{c}{t_1} \ge \frac{c^2}{R}.$$

Alles, was geringer beschleunigt, wird zurück ins Innere der Singularität reflektiert, genauer gesagt, es bleibt auf dem Rand der Singularität haften, da ein Rückfall in die Vergangenheit nicht möglich ist. Die größte Beschleunigung liegt vor zum Zeitpunkt des Urknalls. Danach verlangsamt sich das Universum immer mehr, ohne jedoch ganz zum Stillstand zu kommen. Die potentielle Energie erreicht auf dem Schwarzschildradius ihr Maximum. Noch vorhandene radiale Energie wird vollständig in Rotationsenergie umgewandelt, welche den Drehimpuls zu ändern versucht. Ein solches System ist nicht stabil, es muß kollabieren, da der Drehimpuls konstant bleibt. Unter dem Gravitationsdruck in der Singularität kommt es folglich zu einem erneuten Urknall, und dieser Mechanismus wiederholt sich theoretisch unendlich oft.

