Aufgabe: Erläutern Sie anhand eines Beispiels, warum die Singularität der Raumzeit nach dem Urknall nicht mehr nachgewiesen werden kann und warum sich das All ausdehnt.

Lösung: Wir zeigen, daß eine gleichmäßig über die Ecken eines Würfels verteilte Punktmasse ein geringeres Feld auf dem Schwarzschildradius erzeugt wie die im Ursprung vereinte Punktmasse selbst. Seien

$$(x_i, y_j, z_k) = \left(\pm\frac{a}{2}, \pm\frac{a}{2}, \pm\frac{a}{2}\right)$$

mit $i, j, k \in \{1, 2\}$ die 8 Eckpunkte eines Würfels mit der gleichen Punktmasse m. Dann ist die Kraftwirkung auf eine Masse M im Punkt (x, y, z) gegeben durch

$$\mathbf{F}_1(x, y, z) = -\gamma m M \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \frac{(x - x_i)\mathbf{e}_x + (y - y_j)\mathbf{e}_y + (z - z_k)\mathbf{e}_z}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_j)^2 + (z - z_k)^2}^{\,3}}.$$

Setzen wir die Koordinaten der Punktmassen in die Newtonsche Bewegungsgleichung ein, so erhalten wir allgemein für das Gravitationsfeld den Ausdruck

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_1(x, y, z) = &-\gamma m \left\{ \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_x + \left(y - \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_y + \left(z - \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_z}{\sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2}^{\,3}} + \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_x + \left(y - \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_y + \left(z + \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_z}{\sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{a}{2}\right)^2}^{\,3}} \right\} \\
&-\gamma m \left\{ \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_x + \left(y - \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_y + \left(z - \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_z}{\sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2}^{\,3}} + \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_x + \left(y - \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_y + \left(z + \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_z}{\sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{a}{2}\right)^2}^{\,3}} \right\} \\
&-\gamma m \left\{ \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_x + \left(y + \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_y + \left(z - \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_z}{\sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2}^{\,3}} + \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_x + \left(y + \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_y + \left(z + \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_z}{\sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{a}{2}\right)^2}^{\,3}} \right\} \\
&-\gamma m \left\{ \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_x + \left(y + \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_y + \left(z - \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_z}{\sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2}^{\,3}} + \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_x + \left(y + \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_y + \left(z + \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_z}{\sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{a}{2}\right)^2}^{\,3}} \right\}.
\end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir den Beobachtungspunkt an der Stelle $x = y = 0$. Dann setzt sich das Feld aus folgenden Beiträgen zusammen:

Copyright © 2017, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

$$\mathbf{g}_1(0,0,z) = -\gamma m\left\{\frac{-\frac{a}{2}\mathbf{e}_x - \frac{a}{2}\mathbf{e}_y + \left(z-\frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_z}{\sqrt{z^2 - az + \frac{3}{4}a^2}^3} + \frac{-\frac{a}{2}\mathbf{e}_x - \frac{a}{2}\mathbf{e}_y + \left(z+\frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_z}{\sqrt{z^2 + az + \frac{3}{4}a^2}^3}\right\}$$
$$-\gamma m\left\{\frac{\frac{a}{2}\mathbf{e}_x - \frac{a}{2}\mathbf{e}_y + \left(z-\frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_z}{\sqrt{z^2 - az + \frac{3}{4}a^2}^3} + \frac{\frac{a}{2}\mathbf{e}_x - \frac{a}{2}\mathbf{e}_y + \left(z+\frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_z}{\sqrt{z^2 + az + \frac{3}{4}a^2}^3}\right\}$$
$$-\gamma m\left\{\frac{-\frac{a}{2}\mathbf{e}_x + \frac{a}{2}\mathbf{e}_y + \left(z-\frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_z}{\sqrt{z^2 - az + \frac{3}{4}a^2}^3} + \frac{-\frac{a}{2}\mathbf{e}_x + \frac{a}{2}\mathbf{e}_y + \left(z+\frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_z}{\sqrt{z^2 + az + \frac{3}{4}a^2}^3}\right\}$$
$$-\gamma m\left\{\frac{\frac{a}{2}\mathbf{e}_x + \frac{a}{2}\mathbf{e}_y + \left(z-\frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_z}{\sqrt{z^2 - az + \frac{3}{4}a^2}^3} + \frac{\frac{a}{2}\mathbf{e}_x + \frac{a}{2}\mathbf{e}_y + \left(z+\frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_z}{\sqrt{z^2 + az + \frac{3}{4}a^2}^3}\right\}.$$

Von diesen Termen verbleibt allein der Ausdruck

$$\mathbf{g}_1(0,0,z) = -4\gamma m\left\{\frac{\left(z-\frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_z}{\sqrt{z^2 - az + \frac{3}{4}a^2}^3} + \frac{\left(z+\frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_z}{\sqrt{z^2 + az + \frac{3}{4}a^2}^3}\right\},$$

da sich die anderen Beiträge wegheben. Insbesondere ist $\mathbf{g}_1(0,0,0) = 0.$ Führen wir Kugelkoordinaten

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta$$

ein, so ist

$$\mathbf{g}_1(r) = -\frac{4\gamma m}{r^2}\left\{\frac{1-\frac{a}{2r}}{\sqrt{1-\frac{a}{r}+\frac{3}{4}\frac{a^2}{r^2}}^3} + \frac{1+\frac{a}{2r}}{\sqrt{1+\frac{a}{r}+\frac{3}{4}\frac{a^2}{r^2}}^3}\right\}\mathbf{e}_z.$$

Im Falle $a \ll r$ können wir den quadratischen Term vernachlässigen, i.e.

$$\mathbf{g}_1(r) \approx -\frac{4\gamma m}{r^2}\left\{\left(1-\frac{a}{2r}\right)\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-\frac{3}{2}} + \left(1+\frac{a}{2r}\right)\left(1+\frac{a}{r}\right)^{-\frac{3}{2}}\right\}\mathbf{e}_z,$$

und die binomische Näherung verwenden:

Copyright © 2017, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

$$\mathbf{g}_1(r) \approx -\frac{4\gamma m}{r^2}\left\{\left(1-\frac{a}{2r}\right)\left(1+\frac{3}{2}\frac{a}{r}\right)+\left(1+\frac{a}{2r}\right)\left(1-\frac{3}{2}\frac{a}{r}\right)\right\}\mathbf{e}_z,$$

so daß am Ende lediglich folgender Term verbleibt:

$$\mathbf{g}_1(r) \approx -\frac{8\gamma m}{r^2}\left\{1-\frac{3}{4}\frac{a^2}{r^2}\right\}\mathbf{e}_z.$$

Dieses Feld geht für a gegen null in den klassischen Ausdruck für eine Punktmasse über:

$$\lim_{a\to 0}\mathbf{g}_1(r) = -\frac{8\gamma m}{r^2}\mathbf{e}_z.$$

In Abb. 1 sind die Verhältnisse noch einmal graphisch dargestellt.

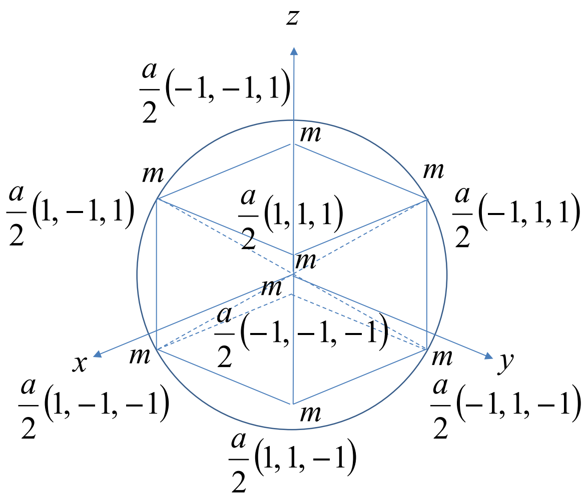

Abbildung 1. Acht in den Ecken eines Quaders angeordnete Punktmassen *m* im Abstand *r* zur Singularität

Umgekehrt entspricht die aus allen Punktmassen resultierende, im Ursprung vereinigte Masse einer Kraft am Ort $\mathbf{r}$, die gegeben ist durch

$$\mathbf{F}_2(x,y,z) = -8\gamma m M\frac{x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3},$$

was als Feldgröße ausgedrückt und in Polarkoordinaten angegeben die Relation

$$\mathbf{g}_2(r,\varphi,\theta) = -8\gamma m\frac{\cos\varphi\sin\theta\mathbf{e}_x + \sin\varphi\sin\theta\mathbf{e}_y + \cos\theta\mathbf{e}_z}{r^2}$$

ergibt. An der Stelle $x = y = 0$ bzw. $\theta = 0$ erhalten wir wieder die bekannte Formel

$$\mathbf{g}_2(r) = -\frac{8\gamma m}{r^2}\mathbf{e}_z.$$

Copyright © 2017, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

Das ist die Feldstärke, die eine in der Singularität konzentrierte Masse von $8m$ auf dem Schwarzschildradius r erzeugt. Entsprechend ergibt sich mit

$$\frac{a}{2r} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

wenn dieselbe Masse durch Paarbildung auf dem Schwarzschildradius entsteht, eine wesentliche geringere Feldstärke von

$$\mathbf{g}_1(r) = -\frac{\sqrt{3}\gamma m}{r^2}\left\{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} + \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}\right\}\mathbf{e}_z \approx 0{,}41 \cdot \mathbf{g}_2(r),$$

dunkle Materie nicht eingerechnet. Die identische Massenverteilung erzeugt im Zentrum des Universums, also in der Singularität, überhaupt keine Feldstärke. Daher kann auch deren genaue Lage im All nach dem Urknall nicht mehr aufgefunden werden. Wäre die Sphäre, die dem Schwarzschildradius entspricht, gleichmäßig mit Materie oder Antimaterie belegt, so würde im gesamten All überhaupt keine Gravitation herrschen, und wo es keine Gravitation gibt, kann auch nichts eine Beschleunigung erfahren. Weil die Anziehungskraft nach dem Urknall auf dem Schwarzschildradius offenbar nachgelassen hat, dehnt sich das Weltall aus, und die fehlende potentielle Energie ist in kinetische umgewandelt worden. In der Singularität selbst verschwindet die Kraftwirkung nach dem Urknall wegen $\mathbf{g}_1(0{,}0{,}0) = 0$, zumal sich dort nach der Annihilierung der Restenergie auch keine Masse mehr befindet, die sich über den Raum gleichmäßig verteilen könnte. Da wir zum Zeitpunkt des Urknalls annehmen können, daß die Masse nur auf derjenigen Kugeloberfläche um die Singularität herum entsteht, die dem Schwarzschildradius entspricht, ist auch nur auf dieser Sphäre eine Gravitationswechselwirkung zu spüren, während die Gravitation im Innern null ist. Nach außen fällt das Feld reziprok mit dem Quadrat des Abstands von der Singularität ab, doch tritt dieser Fall nicht auf, weil die Raumkrümmung den Austritt von Materie und Strahlung verhindert.

Anmerkung: Was wir hier an einen Quader demonstriert haben, läßt sich natürlich auf einen beliebigen Polyeder ausdehnen. Da wir außerdem angenommen haben, daß es Lücken in der einhüllenden Sphäre gibt, werden sich die beiden Feldstärken auch niemals gleichen.

Copyright © 2017, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.