Aufgabe: Zeigen Sie, daß die innere Energie in einem System, dessen Entropie konstant ist, nur von der Teilchenzahl bzw. Masse abhängt, und begründen Sie, warum es dadurch in einem Universum, das sich nicht ausdehnt, zu einem Urknall kommt.

Beweis: In einem isochoren System, das sich nicht ausdehnt und in dem die Entropie konstant bleibt, vereinfacht sich die Gibbssche Fundamentalgleichung

$$dU = -pdV + TdS + \mu dN$$

zu

$$\frac{dU}{T} = \frac{\mu}{T} dN.$$

Wir nehmen an, daß sich das Universum wie ein monoatomares ideales Gas verhält, und daß die kalorische Zustandsgleichung gegeben ist durch

$$U = \frac{3}{2} NkT,$$

mit der inneren Energie U und der Boltzmann-Konstanten k. Setzen wir in die Gibbssche Fundamentalgleichung entsprechend

$$\frac{1}{T} = \frac{3}{2} k \frac{N}{U} \quad \text{und} \quad \frac{\mu}{T} = \left(\frac{\mu}{T}\right)_0 - k \ln\left[\left(\frac{U}{U_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{V}{V_0}\right) \left(\frac{N}{N_0}\right)^{-\frac{5}{2}}\right]$$

die kalorische Zustandsgleichung und das chemische Potential des idealen Gases ein, so folgt für ein konstantes Volumen der Ausdruck

$$\frac{3}{2} k \frac{dU}{U} = \left(\frac{\mu}{T}\right)_0 \frac{dN}{N} - k \ln\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{N}{N_0}\right)^{-\frac{5}{2}}\right] \frac{dN}{N}.$$

Mit dem Grenzwert des chemischen Potentials für ein ideales Gas

$$\left(\frac{\mu}{T}\right)_0 = \frac{5}{2} k$$

und aufgrund der bei konstanter Entropie geltenden Beziehung aufgrund der thermischen Weglänge,

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{N}{N_0},$$

folgt weiter

$$\frac{3}{2} k \frac{dU}{U} = \frac{5}{2} k \frac{dN}{N} + \frac{3}{2} k \frac{\ln N - \ln N_0}{N} dN.$$

Copyright © 2016, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

Nach Kürzen entsprechender Terme erhalten wir die einfach zu integrierende Beziehung

$$\frac{dU}{U} = \left(\frac{5}{3} - \ln N_0\right)\frac{dN}{N} + \frac{\ln N}{N}dN.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung liefert den Ausdruck

$$\ln\frac{U}{U_0} = \left(\frac{5}{3} - \ln N_0\right)\ln\frac{N}{N_0} + \int_{N_0}^{N}\frac{\ln N}{N}dN,$$

und für das Integral erhalten wir die einfache Relation

$$\int_{N_0}^{N}\frac{\ln N}{N}dN = \int_{\ln N_0}^{\ln N} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\ln N_0}^{\ln N} = \frac{1}{2}\left((\ln N)^2 - (\ln N_0)^2\right).$$

Nach Einsetzen in obige Gleichung folgt

$$\ln\frac{U}{U_0} = \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{2}\ln\frac{N}{N_0}\right)\ln\frac{N}{N_0}.$$

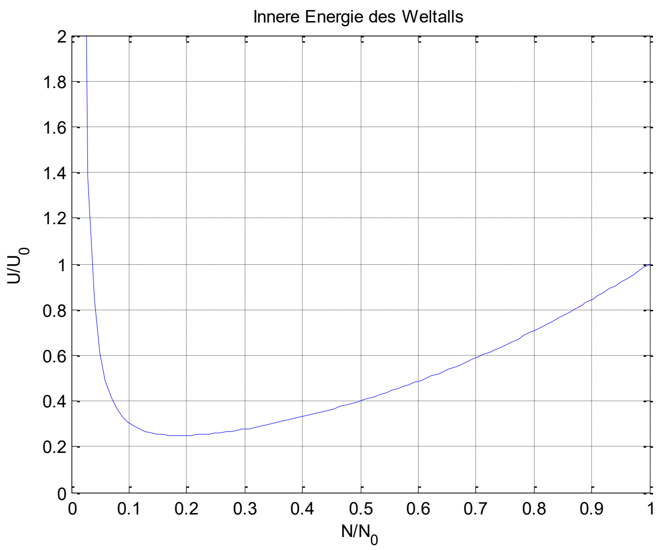

Abbildung 1. Innere Energie eines nicht expandierenden Weltalls

Lösen wir diesen Ausdruck nach der inneren Energie auf, ergibt sich als endgültiges Resultat ein Ausdruck, der nur von der Teilchenzahl bzw. der Stoffmenge abhängig ist (siehe Abb. 1):

$$U = U_0\left(\frac{N}{N_0}\right)^{\frac{5}{3}+\frac{1}{2}\ln\frac{N}{N_0}}.$$

Weil das Verhältnis der Teilchenzahlen gleich dem Verhältnis der Massen ist, und weil der Grenzwert der inneren Energie in einem System, in dem die Entropie erhalten bleibt, für eine

Copyright © 2016, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

gegen Null gehende Masse unendlich wird, kommt es im Universum, nachdem jegliche Masse verschluckt worden ist, zu einem Urknall:[1]

$$\lim_{N\to 0}\frac{U}{U_0}=\lim_{N\to 0}\left(\frac{N}{N_0}\right)^{\frac{5}{3}+\frac{1}{2}\ln\frac{N}{N_0}}\to\infty.$$

Das ist eine direkte Folge davon, daß das chemische Potential die Rolle der potentiellen Energie übernimmt und diese in der Singularität unendlich wird,

qed

[1] Das Minimum wird erreicht an der Stelle exp(-5/3)=0,19

Copyright © 2016, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.