Aufgabe: Berechnen Sie die Entropie des Universums und nehmen Sie dazu an, daß es sich nicht ausdehnt, wohl aber kontinuierlich an Masse verliert. Begründen Sie schlüssig, warum die Entropie dann eine Erhaltungsgröße sein muß.

Lösung: Wir nehmen an, daß sich das Universum wie ein monoatomares ideales Gas verhält. Die thermische Zustandsgleichung des idealen Gases lautet:

$$pV = NkT,$$

wobei p der Druck, N die Teilchenzahl, V das Volumen und T die absolute Temperatur ist. Die kalorische Zustandsgleichung ist gegeben durch

$$U = \frac{3}{2}NkT$$

mit der inneren Energie U und der Boltzmann-Konstanten k. Lösen wir die Gibbssche Fundamentalgleichung der inneren Energie

$$dU = -pdV + TdS + \mu dN$$

nach der Entropie auf, folgt daraus

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN.$$

Aus der Eulergleichung

$$S = \frac{1}{T}U + \frac{p}{T}V - \frac{\mu}{T}N$$

folgt durch Differentiation der Ausdruck

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN + Ud\frac{1}{T} + Vd\frac{p}{T} - Nd\frac{\mu}{T},$$

und nach Abziehen der Gibbsschen Fundamentalgleichung erhalten wir die Gibbs-Duhem-Relation:

$$Ud\frac{1}{T} + Vd\frac{p}{T} - Nd\frac{\mu}{T} = 0.$$

In diese Relation setzen wir sodann die thermische und kalorische Zustandsgleichung

$$\frac{1}{T} = \frac{3}{2}k\frac{N}{U} \quad \text{bzw.} \quad \frac{p}{T} = k\frac{N}{V}$$

ein, womit wir nach Integration von

$$d\frac{\mu}{T} = -\frac{3}{2}k\frac{dU}{U} - k\frac{dV}{V} + \frac{5}{2}k\frac{dN}{N}$$

als dritte Zustandsgleichung das chemische Potential des idealen Gases erhalten:

$$\frac{\mu}{T} = \left(\frac{\mu}{T}\right)_0 - k \ln\left[\left(\frac{U}{U_0}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{V}{V_0}\right)\left(\frac{N}{N_0}\right)^{-\frac{5}{2}}\right].$$

Daraus können wir mit Hilfe der Euler-Relation

$$S = \frac{3}{2}kN + kN - \frac{\mu}{T}N$$

und der inneren Energie auch die Entropie berechnen:

$$S = \frac{5}{2}kN - \left(\frac{\mu}{T}\right)_0 N + kN \ln\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{V}{V_0}\right)\left(\frac{N}{N_0}\right)^{-1}\right].$$

Aus dieser Beziehung erhalten wir sowohl den Anfangswert der Entropie zum Zeitpunkt des Urknalls,

$$S_0 = \frac{5}{2}N_0 k - \left(\frac{\mu}{T}\right)_0 N_0,$$

als auch die Entropieänderung während desselben:

$$\Delta S = \frac{5}{2}k(N - N_0) + \frac{3}{2}kN \ln\frac{T}{T_0} + kN\ln\frac{V}{V_0} - kN\ln\frac{N}{N_0} - \left(\frac{\mu}{T}\right)_0 (N - N_0).$$

In einem Weltall, dessen Masse konstant ist, entfallen der erste und der letzte Term, und es gilt

$$\Delta S = \frac{3}{2}kN \ln\frac{T}{T_0} + kN\ln\frac{V}{V_0} - kN\ln\frac{N}{N_0}.$$

Ein Universum jedoch, dessen Masse zwar abnimmt, dessen Volumen aber konstant bleibt, weist eine Entropieänderung von

$$\Delta S = \frac{5}{2}k(N - N_0) + \frac{3}{2}kN \ln\frac{T}{T_0} - kN\ln\frac{N}{N_0} - \left(\frac{\mu}{T}\right)_0 (N - N_0)$$

auf. Im Zustand $T = 0$ und $N = 0$ folgt daraus

$$\Delta S = -\frac{5}{2}kN_0 + \left(\frac{\mu}{T}\right)_0 N_0 = 0,$$

da die Entropie im leeren Raum ihren Sinn verliert. Folglich gilt als Grenzwert des chemischen Potentials stets

$$\left(\frac{\mu}{T}\right)_0 = \frac{5}{2}k.$$

In einem unendlich ausgedehnten Weltall ergibt die Definition eines chemischen Potentials trotz der darin enthaltenen Masse keinen Sinn mehr, so daß wir wegen $N = N_0$ schreiben können:

$$\Delta S = kN\ln\left[\frac{T^{3/2}}{T_0^{3/2}}\frac{V}{V_0}\frac{N_0}{N}\right].$$

Mithin lautet der allgemeine Ausdruck für die Entropie des Alls, da $S_0 = 0$,

$$S(V,T,N) = \frac{3}{2}kN\ln\frac{T}{T_0} + kN\ln\frac{V}{V_0} - kN\ln\frac{N}{N_0}.$$

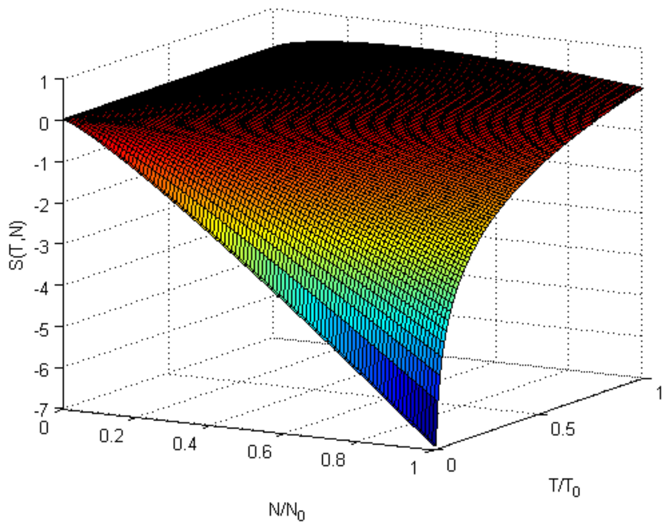

Abbildung 1. Die Entropie eines Universums konstanter Größe, aber abnehmender Masse

Wir postulieren nun einen unveränderlichen Raum konstanter Größe, der sich nicht ausdehnt, d.h. $V = V_0$. Dann können wir auch das Maximum der Entropiefunktion

$$S(T,N) = \frac{3}{2}kN\ln\frac{T}{T_0} - kN\ln\frac{N}{N_0}$$

aus deren partiellen Ableitungen bestimmen:

$$\frac{\partial S(T,N)}{\partial T} = \frac{3}{2}k\frac{N}{T}, \qquad \frac{\partial S(T,N)}{\partial N} = \frac{3}{2}k\ln\frac{T}{T_0} - k\ln\frac{N}{N_0} - k.$$

Nullsetzen liefert die Bedingung

$$\ln\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}\frac{N_0}{N}\right] = 1 \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} = e\frac{N}{N_0}.$$

An dieser Stelle ist

$$S(T,N) = kN\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} - kN\ln\frac{N}{N_0} = kN\ln e > 0,$$

und zwar für

$$\frac{N_0}{N} > \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Aus den zweiten partiellen Ableitungen folgt, daß es sich um ein lokales Maximum handelt:

$$\frac{\partial S^2(T,N)}{\partial T^2} = -\frac{3}{2}k\frac{N}{T^2} < 0, \qquad \frac{\partial^2 S(T,N)}{\partial N^2} = -\frac{k}{N} < 0.$$

In Abb. 1 ist die Entropie als Funktion zweier Variablen als Oberfläche dargestellt. Wenn beide Variablen ihre maximalen und minimalen Werte annehmen, ist die Entropieänderung jeweils gleich null. Die Linien gleicher Entropie werden aus dem Konturplot in Abb. 2 ersichtlich, sie folgen einer Wurzel-hoch-drei-Abhängigkeit in der Temperatur. Wenn sich also die Entropie zu Beginn und am Ende des Universums nicht ändert, stellt sich mit Recht die Frage, warum sie sich dazwischen ändern sollte. Wenn wir zeigen können, daß sich die Temperatur mit der Teilchenzahl gemäß folgender Relation verhält,

$$\frac{\sqrt{T}^3}{N} = \frac{\sqrt{T_0}^3}{N_0},$$

wäre vollständig bewiesen, daß die Entropie eine Erhaltungsgröße ist. Das ist aber eigentlich selbstverständlich, da nach dem Welle-Teilchen-Dualismus die Energie eines relativistischen Teilchens wegen der Zustandssumme mit

$$E = \pi kT = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$$

angenommen werden kann, also die Größe

$$\lambda\sqrt{T} = \frac{h}{\sqrt{2\pi mk}} = \lambda_0\sqrt{T_0}$$

eine abgeleitete Naturkonstante ist. Nehmen wir von beiden Seiten der Gleichung die dritte Potenz, d.h.

$$\lambda^3\sqrt{T}^3 = \lambda_0^3\sqrt{T_0}^3,$$

und fordern, daß die Teilchenzahl der Abhängigkeit

$$N \sim \frac{1}{\lambda^3} = \frac{p^3}{h^3}$$

folgt und damit der Masse ein Impulsvektor $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ einer bestimmten Wellenlänge zugeordnet werden kann, so wird klar, daß es einen reziproken Raum geben muß, der durch drei Impulskoordinaten aufgespannt wird. Aufgrund der formulierten Abhängigkeit haben wir gezeigt, daß die Entropie des Weltalls eine Erhaltungsgröße ist, d.h. in einem Universum, das sich nicht ausdehnt, gilt stets $\Delta S = 0$, und es wird stets genau soviel Masse in Strahlung umgewandelt, wie die Entropieerhaltung zuläßt. Die Entropie folgt also von den zahlreichen Möglichkeiten, die es auf der Entropieoberfläche gibt, genau jener Nullniveau-Konturlinie aus Abb. 2, die vom Zustand $(1,1)$ zum Zustand $(0,0)$ führt.

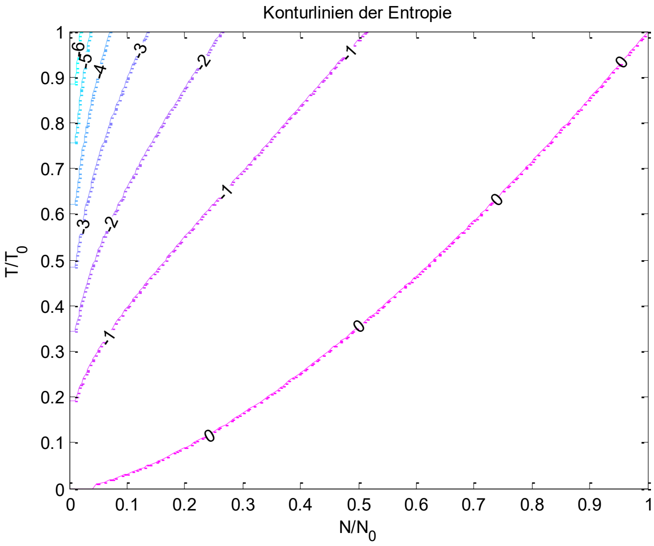

Abbildung 2. Konturlinien konstanter Entropie auf der Entropieoberfläche

Die Entropie ist eine Erhaltungsgröße, welche über die Ordnung im Universum wacht, so daß weder zuwenig noch zuviel Masse sprich kinetische Energie in Licht, d.h. potentielle Energie, überführt werden kann. Wir können im Weltall also keine Galaxien mehr beobachten, die sich mit Lichtgeschwindigkeit von uns entfernen, weil beim Erreichen der Lichtgeschwindigkeit eine vollständige Zerstrahlung der Materie in masselose Photonen stattfindet. Masse unendlicher Dichte kann es aus physikalischer Sicht nicht geben, Masse darf sich nur nennen, was sich nicht mit Lichtgeschwindigkeit bewegt. Es kann daher bezweifelt werden, daß sich im Innern von Schwarzen Löchern irgendwelche Massen befinden, von denen eine Gravitation ausgehen kann.[1] Wenn die Temperatur mit der inneren Energie auf Null absinkt, geht nach obiger Beziehung die thermische Wellenlänge gegen Unendlich und die Masse gegen Null. Das liegt aber nicht an einer vermeintlichen Ausdehnung des Universums, sondern daran, daß Energie nicht vernichtet werden kann und ergo im reziproken Raum als potentielle Energie gespeichert bleibt. Wenn also die gesamte Masse „aufgesogen" ist, auch weil die Lebensdauer des Universums ebenso wie die Größe des Raums Erhaltungsgrößen sind,[2] muß es am Ende der Zeit bei „unendlich" tiefen Temperaturen zu einer erneuten[3] Licht-Materie-Konversion kommen.

---

[1] Die Gravitation ist eine Folge der Krümmung des Raumes, d.h. der Raum wäre auch gekrümmt, wenn gar keine Masse in ihm enthalten wäre.

[2] Die Zeit also ablaufen kann

[3] Wahrscheinlich spontanen

