Aufgabe: Sie möchten ein Ausweichmanöver im Luftkampf durch ein neuronales Netz trainieren. Welches mathematische Modell verwenden Sie dazu?

Lösung: Bei einem Ausweichmanöver fliegen zwei Kollisionsgegner so lange aufeinander zu, bis der Ausweichende im Abstand d_0 mit dem Abdrehen beginnt, wobei ihm der andere sofort folgt, falls er auf Vorhalt programmiert ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir die Krümmungsradien so, daß sich die beiden Krümmungskreise mit orthogonalen Tangenten schneiden.[1] Betrachten wir zunächst die geometrischen Relationen in Abb. 1.

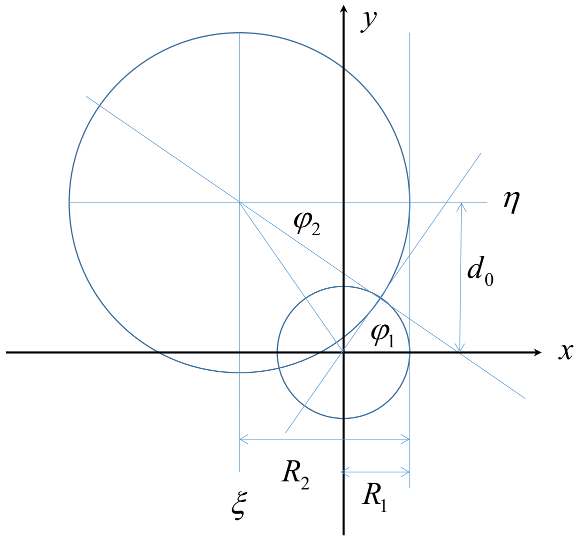

Abbildung 1. Geometrische Anordnung zu Beginn des Ausweichmanövers

Zu Beginn des Ausweichmanövers befindet sich der Ausweichende am Ort $(R_1, 0)$ und der Angreifer am Ort (R_1, d_0). Das Manöver beginnt, sowie der Ausweichende vom Geradeausflug in den Kurvenflug übergeht, wobei wir mit gutem Grund annehmen können, daß beide ab einem bestimmten Abstand mit maximaler Drehrate sprich Querbeschleunigung abdrehen. Der Clou dabei ist, daß der Angreifer keinen engeren Krümmungsradius fliegen kann, als ihm bauart- und geschwindigkeitsbedingt möglich ist. Diese Chance wiederum nutzt der Ausweichende aus, um auf dem schnellsten Wege den Mittelpunkt des gegnerischen Krümmungskreises anzufliegen. Idealerweise kreuzt er dabei die Bahn seines Kollisionsgegners unter einem rechten Winkel, in der Absicht, früher als dieser im Kollisionspunkt[2] zu sein. Eine Kollision findet nicht statt, wenn es dem Ausweichenden gelingt, sich in den sicheren Bereich innerhalb des gegnerischen Krümmungskreises zu retten.[3] Weitere hinzukommende Gefährdungen wollen wir in diesem ersten Anlauf nicht betrachten.

Mit den Mittelpunktkoordinaten $\xi = R_1 - R_2$ und $\eta = d_0$ gilt für die Radien R_1 und R_2 sowie die Polarwinkel φ_1 und φ_2 der Zusammenhang

[1] Im folgenden bezeichnet der Index 1 stets das eigene, angegriffene Luftfahrzeug, während der Index 2 auf das gegnerische bzw. dessen Waffe abhebt.
[2] Dem Schnittpunkt beider Krümmungskreise
[3] innerhalb dessen er zumindest in vorübergehender Sicherheit ist

$$d_0 = R_1 \sin \varphi_1 + R_2 \sin \varphi_2.$$

Aufgrund der günstig gewählten Geometrie[4]

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

läßt sich das Problem auf einen Winkel reduzieren:

$$d_0 = R_1 \sin \varphi_1 + R_2 \cos \varphi_1.$$

Ferner folgt aufgrund der rechtwinkligen Dreiecksbeziehungen der Zusammenhang

$$R_1^2 + R_2^2 = \xi^2 + \eta^2$$

oder eingesetzt und ausmultipliziert die Gleichung

$$R_1^2 + R_2^2 = R_1^2 - 2R_1R_2 + R_2^2 + d_0^2.$$

Nach Kürzen entsprechender Terme ergibt sich daraus der ideale Abstand als das Wurzelzweifache des geometrischen Mittels beider Krümmungsradien, i.e.

$$d_0 = \sqrt{2R_1R_2}.$$

Durch Einsetzen dieser Relation können wir mit Hilfe der obigen Gleichung auch den Winkel φ_1 ermitteln:

$$\sqrt{2R_1R_2} = R_1 \sin \varphi_1 + R_2 \cos \varphi_1.$$

Durch Einführung der Abkürzung $n = R_2 / R_1$ für das Verhältnis der Krümmungsradien folgt nach Substitution

$$\sqrt{2n} = \sin \varphi_1 + n \cos \varphi_1.$$

Mittels der Definition

$$z \equiv \frac{R_1}{d_0} = \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

können wir φ_1 wahlweise in Abhängigkeit von *n* oder in Abhängigkeit von *z* berechnen. Wir entscheiden uns aus Gründen der Einfachheit für die Abhängigkeit von *n*. Damit folgt aus obiger Beziehung

$$\sqrt{2n} - \sin \varphi_1 = n\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_1}.$$

Mittels der Substitution $x \equiv \sin \varphi_1$ kommen wir durch Quadrieren beider Seiten auf die quadratische Gleichung

$$\left(1 + n^2\right)x^2 - 2\sqrt{2n}x + (2 - n)n = 0,$$

[4] Was nicht immer der Fall ist, vor allem bei zu früh oder zu spät eingeleiteten Manövern

die allgemein von der Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ist und die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

besitzt, wobei die Koeffizienten gegeben sind durch

$$a = 1 + n^2, \quad b = -2\sqrt{2n}, \quad c = (2-n)n.$$

Daraus folgt der Winkel φ_1 in Abhängigkeit von n zu

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{\sqrt{2n} + n(n-1)}{1+n^2}$$

oder wahlweise in Abhängigkeit von z zu

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{1 - 2z^2 + 4z^3}{1 + 4z^4}.$$

Für n gegen unendlich ist

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_1 = \arcsin \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{2}{n^3}}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Fliegen wir den Schnittpunkt also unter der Bedingung an, daß sich die Tangenten dort orthogonal schneiden, so ergibt sich für das Verhältnis der unterschiedlichen Zeiten t_1 und t_2, bei denen der Schnittpunkt erreicht wird, die Relation

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{b_1}{b_2}\frac{v_2}{v_1} = \frac{v_2}{v_1}\frac{R_1}{R_2}\frac{\varphi_1}{\pi/2 - \varphi_1},$$

wobei b_1 und b_2 die entsprechenden Bogenlängen sind. Erreicht der Ausweichende den Schnittpunkt früher als sein Verfolger, so muß $t_1 < t_2$ sein. Mit den relativen Größen

$$t = \frac{t_1}{t_2}, \quad v = \frac{v_2}{v_1}, \quad n = \frac{R_2}{R_1}, \quad \varphi = \frac{2}{\pi}\varphi_1$$

muß also für ein erfolgreiches Ausweichmanöver die Bedingung

$$t = \frac{v}{n}\frac{\varphi}{1-\varphi} < 1$$

erfüllt sein.[5] Alternativ können wir letztere auch durch das Verhältnis der Drehraten

[5] Es gibt noch weitere Bedingungen, die aber nicht Gegenstand dieser Untersuchung sind.

$$\omega \equiv \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{v_2}{R_2}\frac{R_1}{v_1} = \frac{v}{n}$$

ausdrücken:

$$t = \omega \frac{\varphi}{1-\varphi} < 1.$$

Bei gleichen Drehraten $\omega \approx 1$ ist dann nur noch das Winkelverhältnis abzuschätzen:

$$t \approx \frac{\varphi}{1-\varphi} < 1.$$

Diese Bedingung wäre bereits erfüllt für alle

$$\varphi < \frac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad \varphi_1 < \frac{\pi}{4} = 45°.$$

Die Funktion t ist also im wesentlichen von nur zwei Größen abhängig:

$$t = t(v, n, \varphi(n)),$$

dem Verhältnis der Krümmungsradien n und dem Geschwindigkeitsverhältnis v, da der Drehwinkel seinerseits nur von n abhängt. Den maximalen Fehler

$$\Delta t = \sqrt{\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)^2 \Delta v^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)^2 \Delta n^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial \varphi}\right)^2 \Delta\varphi^2},$$

den wir durch Schätzungen von Geschwindigkeiten und Krümmungsradien begehen können, berechnen wir anhand der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial t}{\partial v} = \frac{1}{n}\frac{\varphi}{1-\varphi} = \frac{t}{v}, \quad \frac{\partial t}{\partial n} = -\frac{v}{n^2}\frac{\varphi}{1-\varphi} = -\frac{t}{n}, \quad \frac{\partial t}{\partial \varphi} = \frac{v}{n}\frac{1}{(1-\varphi)^2} = \frac{t}{1-\varphi}.$$

Damit ergibt sich ein relativer Fehler des Zeitverhältnisses von

$$\frac{\Delta t}{t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta v}{v}\right)^2 + \left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2 + \frac{\Delta\varphi^2}{(1-\varphi)^2}},$$

wobei

$$\Delta\varphi = \frac{2}{\pi}\Delta\varphi_1 = \frac{2}{\pi}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\Delta n$$

und

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{(1+n^2)^2 - \left(\sqrt{2n} + n(n-1)\right)^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{2n\left(1-\sqrt{2n}\right) + n^2 - 1}{1+n^2}\right).$$

Im Prinzip sind damit sämtliche Fehler bis auf den der Geschwindigkeit nur vom relativen Fehler des Verhältnisses der Krümmungsradien abhängig. Letzterer ist gegeben durch

$$\Delta n = \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial R_1}\right)^2 (\Delta R_1)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial R_2}\right)^2 (\Delta R_2)^2}.$$

Mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial n}{\partial R_1} = -\frac{R_2}{R_1^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial n}{\partial R_2} = \frac{1}{R_1}$$

ergibt sich der relative Fehler von n zu

$$\frac{\Delta n}{n} = \sqrt{\left(\frac{\Delta R_1}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R_2}{R_2}\right)^2} \approx \sqrt{2}\,\frac{\Delta R_1}{R_1},$$

wenn wir annehmen, daß die Fehler beider Krümmungsradien gleich groß sind. Analog errechnet sich der relative Fehler der Geschwindigkeiten

$$\frac{\Delta v}{v} = \sqrt{\left(\frac{\Delta v_1}{v_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v_2}{v_2}\right)^2} \approx \sqrt{2}\,\frac{\Delta v_1}{v_1}.$$

Wenn die relativen Fehler von Geschwindigkeit v_1 und Krümmungsradius R_1 jeweils mit 10 Prozent angenommen werden, so beträgt der relative Zeitfehler, und zwar relativ unabhängig vom Verhältnis der Krümmungsradien, ca. 20 %. Setzt man die entsprechenden Fehler des Gegners doppelt so hoch an, liegt man bereits bei 32 %. Diese relativ großen Fehler von bis zu 30 % können im Luftkampf über Sein oder Nichtsein entscheiden. Aufgabe des neuronalen Netzes ist es daher, diese Fehler durch ein Gradientenabstiegsverfahren auf nahezu null zu minimieren. Dies ist möglich, wenn man das neuronale Netz auf korrekte[6] Parameterkombinationen des Modells trainiert, womit die entsprechenden Trajektorien dann allesamt auf einer Hyperfläche liegen, die den fehlerfreien Zustand repräsentiert. Dazu ist es nötig, mittels ausgewogen verteilter Parameterkombinationen die entsprechenden Trainingsgewichte zu ermitteln, die den kompletten Wertebereich abdecken. Diese Hyperfläche, d.h. der relative Zeitvorsprung beim Ausweichmanöver, ist in Abb. 3 graphisch dargestellt.

[6] d.h. fehlerfreie

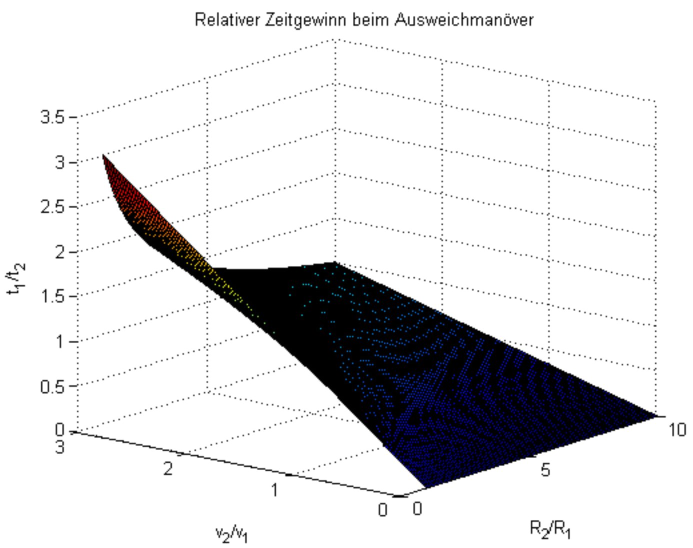

Abbildung 2. Darstellung der zweidimensionalen Hyperfläche

Die in unserem Fall zweidimensionale Hyperfläche beschreibt denjenigen Bereich, der für jede Kombination aus n und v einen entsprechenden Zeitfaktor angibt, um den der Ausweichende früher oder später am mutmaßlichen Kollisionspunkt eintrifft. Der für den Ausweichenden sichere Bereich auf dieser Fläche besteht aus jener Untermenge von Punkten, die auf der z-Achse kleiner sind als eins.[7] Ist der Faktor größer als eins, ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Ausweichende von der gegnerischen Munition getroffen wird, so gut wie 1 (falls ihm nicht noch andere Mittel zu Gebote stehen wie beispielsweise das Ausbringen von Täuschkörpern). Schneidet man die Hyperfläche mit der Ebene $z = 1$, so sind alle darunterliegenden Kombinationen von v und n erlaubt im Sinne von sicheren Parameterkombinationen.

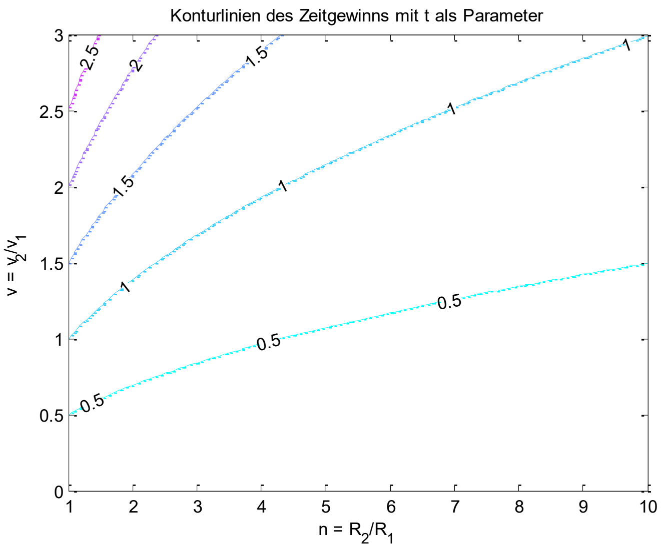

Abbildung 3. Konturlinien der Hyperfläche

Die Kurve sämtlicher Parameterkombinationen aus n und v, welche den gleichen Zeitfaktor t ergeben, nennt man Konturlinien der Hyperfläche. Diese sind mit unterschiedlichen Farben in Abb. 4 dargestellt. Im Diagramm nimmt der Zeitfaktor von links oben nach rechts unten ab.

[7] Abzüglich einer gewissen Toleranz

Der erlaubte Bereich sind alle Trajektorien unterhalb der Konturlinie $t = 1$. Man erkennt, daß abhängig vom Geschwindigkeitsverhältnis v höhere Krümmungsverhältnisse n zum Erfolg führen. Einem schnellfliegenden Objekt kann am besten dadurch ausgewichen werden, daß kleinere Krümmungskreise geflogen werden. Je langsamer der Angreifer, desto größere Kreise können geflogen werden. In der Regel ist das Verhältnis der erzielbaren Krümmungsradien fix. Daher kann es günstiger sein, seine Geschwindigkeit zu erhöhen und so schnell zu fliegen wie der Gegner oder am besten noch schneller, wenn das Lastvielfache es zuläßt. Je langsamer man selbst ist, desto unsicherer wird auch das Ausweichen. Im Prinzip kann man bereits sicher ausweichen, wenn der eigene Krümmungsradius ein Drittel so groß ist wie der des Kollisionsgegners $(n = 3)$ und letzterer nicht schneller fliegt als eineinhalbmal so schnell wie man selbst.

In Abb. 5 ist für ein festes Geschwindigkeitsverhältnis die Abhängigkeit des Zeitfaktors vom gegnerischen Krümmungsradius aufgetragen. Man erkennt, daß erst bei einem Zehntel des gegnerischen Krümmungsradius und dreifacher Geschwindigkeitsüberlegenheit der Kollisionspunkt früher erreicht werden kann. Bei doppelter Geschwindigkeit geschieht dies bei gut einem Viertel, und mit dem halben Krümmungsradius kommt man hin, wenn die Geschwindigkeit des Gegners eineinhalbmal so groß ist wie die eigene.

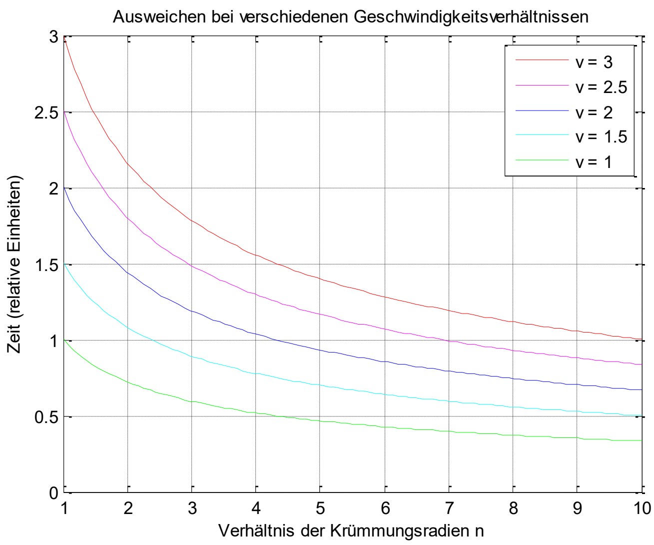

Abbildung 4. Ausgewählte Trajektorien der Hyperfläche

Anhand der Abbildung 5 kann festgelegt werden, in welchem Abstand d_0 vom Gegner mit dem Ausweichmanöver zu beginnen ist. Man sieht, daß bei einem Verhältnis von $n = 2$ und einem Wert von $z = 1/2$ der gegnerische Abstand nicht kleiner werden darf als der Durchmesser des Krümmungskreises. Bei $n = 3$ ist es immerhin bereits der zweieinhalbfache Radius. Beginnt das Ausweichmanöver zu früh, läuft der Pilot Gefahr, in den Vorhalt des Gegners zu geraten und abgeschossen zu werden, beginnt es zu spät, kann nur noch ein engerer Krümmungskreis geflogen werden, sofern es die Struktur aushält.

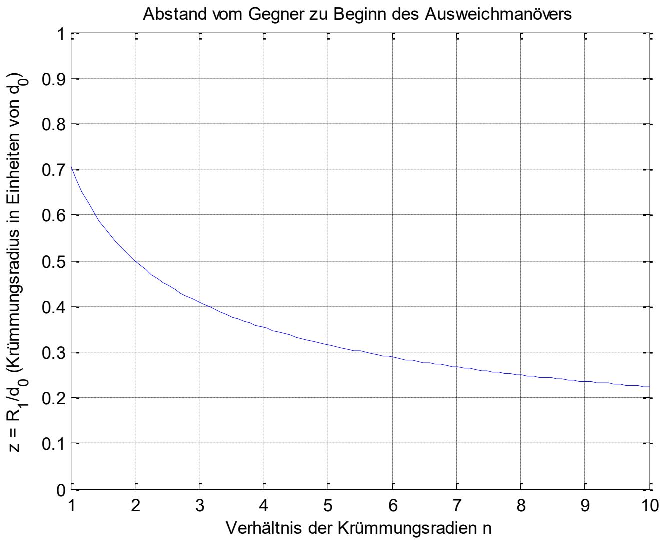

Abbildung 5. Eigener Krümmungsradius relativ zum Abstand des Kollisionsgegners

Anhang 1: Alternative Herleitung des Winkels aus den Schnittpunktkoordinaten

Die Gleichung der Tangente an den Kreis mit Radius R_2 lautet

$$x\tan\varphi_1 - y = 0,$$

die Gleichung der Tangente an den Kreis mit Radius R_1 ist gegeben durch

$$x\cot\varphi_1 + y = d_0 + \xi\cot\varphi_1.$$

Um den Schnittpunkt zu bestimmen, stellen wir dieses lineare Gleichungssystem in Matrix-schreibweise dar:

$$\begin{pmatrix} \tan\varphi_1 & -1 \\ \cot\varphi_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d_0 + \xi\cot\varphi_1 \end{pmatrix}.$$

Als Determinante des homogenen Systems erhalten wir

$$D = \begin{vmatrix} \tan\varphi_1 & -1 \\ \cot\varphi_1 & 1 \end{vmatrix} = \tan\varphi_1 + \cot\varphi_1 = \cot\varphi_1\left(1 + \tan^2\varphi_1\right).$$

Mit den Lösungsdeterminanten

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ d_0 + \xi\cot\varphi_1 & 1 \end{vmatrix} = d_0 + \xi\cot\varphi_1$$

und

$$D_2 = \begin{vmatrix} \tan\varphi_1 & 0 \\ \tan\varphi_2 & d_0 + \xi\cot\varphi_1 \end{vmatrix} = d_0\tan\varphi_1 + \xi$$

ergeben sich für den gesuchten Schnittpunkt die Koordinaten

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{D_1}{D} = \frac{d_0\tan\varphi_1 + \xi}{1 + \tan^2\varphi_1} = \left(d_0\sin\varphi_1 + \xi\cos\varphi_1\right)\cos\varphi_1, \\ y_0 &= \frac{D_2}{D} = \frac{d_0\tan\varphi_1 + \xi}{1 + \tan^2\varphi_1}\tan\varphi_1 = \left(d_0\sin\varphi_1 + \xi\cos\varphi_1\right)\sin\varphi_1. \end{aligned}$$

Das ist äquivalent zur Definition

$$\varphi_1 = \arctan\frac{y_0}{x_0}.$$

Daraus folgt die Kreisgleichung

$$x_0^2 + y_0^2 = \left(d_0\sin\varphi_1 + \xi\cos\varphi_1\right)^2 = R_1^2,$$

aus der wir zusammen mit obiger Bestimmungsgleichung ein lineares Gleichungssystem erhal-ten:

$$R_1 \sin\varphi_1 + R_2 \cos\varphi_1 = d_0,$$
$$d_0 \sin\varphi_1 + (R_1 - R_2)\cos\varphi_1 = R_1,$$

aus dem wir mittels der Beziehung $d_0 = \sqrt{2R_1R_2}$ die Winkel und damit auch die Fehler bestimmen können. Es folgt

$$\varphi_1 = \arcsin\frac{d_0(R_1 - R_2) - R_1R_2}{R_1(R_1 - R_2) - d_0R_2} = \arccos\frac{d_0^2 - R_1^2}{R_2d_0 - (R_1 - R_2)R_1}$$

bzw.

$$\varphi_1 = \arcsin\frac{R_1R_2 + \sqrt{2R_1R_2}(R_2 - R_1)}{R_2\sqrt{2R_1R_2} + R_1(R_2 - R_1)} = \arccos\frac{2R_1R_2 - R_1^2}{R_2\sqrt{2R_1R_2} + R_1(R_2 - R_1)}.$$

Führen wir die Variable *n* ein, so ergibt sich

$$\varphi_1 = \arcsin\frac{n + \sqrt{2n}(n-1)}{n\sqrt{2n} + n - 1} = \arccos\frac{2n-1}{n\sqrt{2n} + n - 1}.$$

Dies ist aufgrund der Identitäten

$$\left(n + \sqrt{2n}(n-1)\right)\left(n\sqrt{2n} - (n-1)\right) = \left(\sqrt{2n} + n(n-1)\right)(2n-1)$$
$$\left(n\sqrt{2n} + n - 1\right)\left(n\sqrt{2n} - (n-1)\right) = (2n-1)n^2 + 2n - 1 = (2n-1)\left(n^2 + 1\right)$$

gleichbedeutend mit

$$\varphi_1 = \arcsin\frac{\sqrt{2n} + n(n-1)}{1 + n^2} = \arccos\frac{n\sqrt{2n} - (n-1)}{1 + n^2}.$$

Anhang 2: Der Fall eines unendlich kleinen Krümmungskreises

Bei unendlich kleinem Krümmungsradius R_1 (siehe Abb. 6) entartet der Kreisbogen $b_1 = R_1\varphi_1$ zu einem Geradenstück l und es gilt

$$\cos\varphi_2 = \frac{R_2}{R_2 + l}, \quad \text{woraus} \quad l = R_2\left(\frac{1}{\cos\varphi_2} - 1\right)$$

folgt.

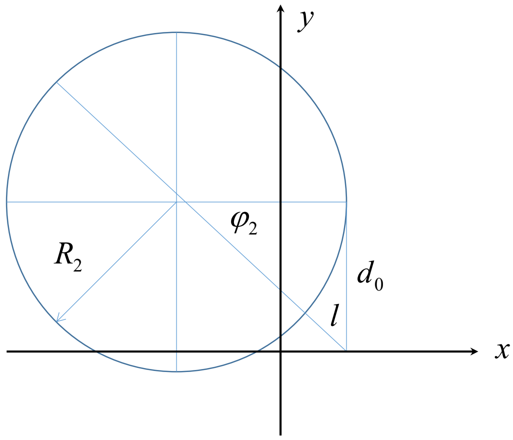

Abbildung 6. Der Spezialfall mit unendlich kleinem Krümmungsradius

Das kleinstmögliche Verhältnis der Bogenlängen bzw. Wege lautet also

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{l}{R_2\varphi_2} = \frac{1}{\varphi_2}\left(\frac{1}{\cos\varphi_2} - 1\right).$$

Die Tangente an den Kreis mit dem Radius R_1 schneidet den Kreis mit Radius R_2 in jedem Punkt senkrecht. Wegen $d_0 = R_2 \tan\varphi_2$ muß gelten:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{\arctan\frac{d_0}{R_2}}\left(\sqrt{1+\left(\frac{d_0}{R_2}\right)^2} - 1\right) < 1 \quad \text{bzw.} \quad 1 < \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{d_0}{R_2}\right)^2} - 1}\arctan\frac{d_0}{R_2},$$

damit der Ausweichende den kürzeren Weg zum Schnittpunkt hat. Sei $x \equiv d_0 / R_2$. Dann finden wir den Grenzwert anhand der Nullstelle der Funktion

$$g(x) = 1 + \arctan x - \sqrt{1+x^2},$$

die bei $x = 1{,}807$ liegt. Für sämtliche Manöver, die in Abständen d_0, die kleiner sind als der 1,8fache gegnerische Krümmungsradius, bzw. unter Winkeln φ_2, die kleiner sind als 61°, geflogen werden, weicht man in den sicheren Bereich aus. Es empfiehlt sich also, den Gegner lieber etwas näher kommen zu lassen als vorzeitig Reißaus zu nehmen.