Aufgabe: Erklären Sie, unter welcher Bedingung Hyperbel und reziproke Hyperbel denselben Sachverhalt beschreiben. Begründen Sie, warum die Allgemeine Relativitätstheorie ohne den Drehimpulserhaltungssatz nicht auskommt.

Lösung: Nach Albert Einstein ist der Raum gekrümmt und hat die Gestalt einer Hyperbel:

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

wobei a ein konstanter Parameter ist. Wir bringen diese Gleichung nun auf die Form einer reziproken Hyperbel, indem wir durch das quadratische Produkt aus beiden Hyperbelkoordinaten x und y dividieren:

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 y^2} = \frac{a^2}{x^2 y^2}.$$

Mit der Festsetzung

$$x^2 y^2 \equiv a^4,$$

was wir axiomatisch fordern müssen, erhalten wir die Gleichung des reziproken Raums, der damit in den reziproken Koordinaten ebenfalls Hyperbelgestalt annimmt:

$$\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2}.$$

Formen wir nun die Vierergrößen für Ort und Impuls,

$$c^2 t^2 - |\vec{r}|^2 = s^2 \quad \text{und} \quad \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = p^2$$

entsprechend um, so daß die euklidischen Größen auf der rechten Seite stehen, also

$$c^2 t^2 - s^2 = |\vec{r}|^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{E^2}{c^2} - p^2 = |\vec{p}|^2,$$

erhalten wir unter Anwendung des obigen Axioms die Ausdrücke

$$c^2 t^2 s^2 = |\vec{r}|^4 \quad \text{und} \quad \frac{1}{c^2} E^2 p^2 = |\vec{p}|^4.$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen miteinander, so stehen auf der linken Seite nur invariante Größen, während auf der rechten nur variable vorkommen:

$$spEt = |\vec{r}|^2 |\vec{p}|^2.$$

Copyright © 2016, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

Diesen Ausdruck nennen wir die universelle „Weltwirkung", weil er alle Größen der Weltgleichung als konstantes Produkt enthält. Mit dem obigen Axiom können wir ferner die Hyperbelgleichungen des reziproken Raums wie folgt schreiben:

$$\frac{1}{s^2}-\frac{1}{c^2t^2}=\frac{1}{|\vec{r}|^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{p^2}-\frac{c^2}{E^2}=\frac{1}{|\vec{p}|^4}.$$

Diese beiden Ausdrücke multiplizieren wir dann noch mit dem Planckschen Wirkungsquantum, so daß folgt:

$$\frac{\hbar^2}{s^2}-\frac{\hbar^2}{c^2t^2}=\frac{\hbar^2}{|\vec{r}|^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\hbar^2}{p^2}-\frac{\hbar^2c^2}{E^2}=\frac{\hbar^2}{|\vec{p}|^4}.$$

Setzen wir die Orts-Impuls-Relation $sp=\hbar$ und die Energie-Zeit-Relation $Et=\hbar$ des Drehimpulses ein,

$$p^2-\frac{E^2}{c^2}=\frac{\hbar^2}{|\vec{r}|^2} \quad \text{bzw.} \quad s^2-c^2t^2=\frac{\hbar^2}{|\vec{p}|^2},$$

und bringen die Subtrahenden auf die rechte Seite, so erhalten wir die Ausdrücke

$$p^2=\frac{E^2}{c^2}+\frac{\hbar^2}{|\vec{r}|^2} \quad \text{und} \quad s^2=c^2t^2+\frac{\hbar^2}{|\vec{p}|^2}$$

und, wenn wir die Wurzel ziehen und das Pluszeichen mit Hilfe der imaginären Einheit in ein Minuszeichen umwandeln, das bereits bekannte Ergebnis

$$p=\sqrt{\frac{E^2}{c^2}-\frac{\hbar^2}{i^2|\vec{r}|^2}} \quad \text{bzw.} \quad s=\sqrt{c^2t^2-\frac{i^2\hbar^2}{|\vec{p}|^2}}.$$

Mit den Definitionen für Impuls- und Ortsoperator aus der Quantenmechanik

$$|\vec{p}|=\frac{\hbar}{i|\vec{r}|} \quad \text{bzw.} \quad |\vec{r}|=\frac{i\hbar}{|\vec{p}|}$$

erhalten wir die invarianten Vierergrößen

$$p=\sqrt{\frac{E^2}{c^2}-|\vec{p}|^2} \quad \text{und} \quad s=\sqrt{c^2t^2-|\vec{r}|^2}.$$

Multiplizieren wir die euklidischen Operatoren für Raum und Impuls miteinander, so folgt

$$|\vec{r}||\vec{p}|=\frac{\hbar}{i|\vec{r}|}\frac{i\hbar}{|\vec{p}|}=\frac{\hbar^2}{|\vec{r}||\vec{p}|}.$$

Copyright © 2016, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

Bringen wir nun noch den Nenner auf die linke Seite und setzen in die Gleichung der universellen Weltwirkung ein, ergibt sich

$$spEt = \left|\vec{r}\right|^2 \left|\vec{p}\right|^2 = \hbar^2,$$

d.h. geometrischer Orts- und Impulsraum können nicht gleichzeitig groß oder klein sein, wie wir das von der Heisenbergschen Unschärferelation her kennen. Wenn der euklidische Ortsraum ausgedehnt ist, ist der kartesische Impulsraum minimal, und umgekehrt. Das ist kein Unschärfe-, sondern ein relativistisches Prinzip, weil beide Größen umgekehrt proportional zueinander sind. Wenn das Licht im Ortsraum nahezu unendlich lange braucht, bis es den Raum durchlaufen hat, ist es im kartesischen Impulsraum wegen dessen Singularität an Ort und Stelle. Das ist eigentlich selbstverständlich, denn der unendlich ausgedehnte euklidische Raum entspricht einer maximalen Radialkomponente der Expansion, aber einer minimalen Azimutalkomponente der Bewegung. Im gegenteiligen Fall, in der Singularität des euklidischen Raums zum Zeitpunkt des Urknalls, ist das Licht überall sofort, weil der Raum wegen der Trägheit der Masse noch keine Radialkomponente der Bewegung aufgenommen hat, während der reziproke Impulsraum hingegen noch maximal ist und dessen Radialkomponente dem Kehrwert der Radialkomponente des euklidischen Raums gleichzusetzen ist, also sehr groß werden kann. Ohne die Einbeziehung der Drehimpulserhaltung bzw. der Wirkung bleibt die Allgemeine Relativitätstheorie unvollständig, und der Urknall kann nicht notwendigerweise daraus abgeleitet werden.

Copyright © 2016, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.