Aufgabe: Lösen Sie die Radialgleichung des Universums und begründen Sie, warum beim Urknall kein einziger Erhaltungssatz der Physik verletzt wird.

Lösung: Für die Erhaltungsgrößen Ort und Impuls gelten im Universum die Relationen

$$s = \sqrt{s_{kin}^2 + s_{kin}^2 \varphi^2} = s_{kin}\sqrt{1+\varphi^2} = r\sqrt{1+\varphi^2} = \sqrt{v^2 + v^2\varphi^2}\,t$$

und

$$p = \sqrt{p_{kin}^2 + p_{kin}^2 \varphi^2} = p_{kin}\sqrt{1+\varphi^2} = mv\sqrt{1+\varphi^2} = \sqrt{v^2 + v^2\varphi^2}\,\frac{E}{c^2},$$

wobei φ jeweils der Winkel zwischen dem Betrag des jeweiligen Vierervektors und seiner Radialkomponente ist.

Nun besitzt jede unserer universellen Erhaltungsgrößen eine Radial- und eine Azimutalkomponente, die zueinander orthogonal sind und die Verhältnisse innerhalb der Singularität wiedergeben. Das Produkt aus Raum und Impuls hat daher die Dimension einer Wirkung:

$$sp = \sqrt{v^2 + v^2\varphi^2}\,t\sqrt{v^2 + v^2\varphi^2}\,\frac{E}{c^2} = \frac{v^2 + v^2\varphi^2}{c^2}Et = \frac{v^2 + v^2\varphi^2}{c^2}\hbar.$$

In ähnlicher Weise gelten im Universum auch für die Erhaltungsgrößen Energie und Zeit vergleichbare Relationen:

$$E = \sqrt{E_{kin}^2 + E_{kin}^2 \varphi^2} = E_{kin}\sqrt{1+\varphi^2} = mvc\sqrt{1+\varphi^2} = mc\sqrt{v^2 + v^2\varphi^2} = p\sqrt{v^2 + v^2\varphi^2}$$

bzw.

$$t = \sqrt{t_{kin}^2 + t_{kin}^2 \varphi^2} = t_{kin}\sqrt{1+\varphi^2} = \frac{v}{c}t\sqrt{1+\varphi^2} = \sqrt{v^2 + v^2\varphi^2}\,\frac{t}{c} = \sqrt{v^2 + v^2\varphi^2}\,\frac{s}{c^2}.$$

Entsprechend hat auch das Produkt aus Energie und Zeit die Dimension einer Wirkung:

$$Et = p\sqrt{v^2 + v^2\varphi^2}\,\sqrt{v^2 + v^2\varphi^2}\,\frac{s}{c^2} = \frac{v^2 + v^2\varphi^2}{c^2}sp = \frac{v^2 + v^2\varphi^2}{c^2}\hbar.$$

Aus beiden Relationen läßt sich ein und dieselbe Radialgleichung extrahieren:

$$v^2 + v^2\varphi^2 = c^2.$$

Durch Zerlegung der Lichtgeschwindigkeit in eine radiale und eine azimutale Komponente

$$c \equiv \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2}$$

erhalten wir mit Hilfe der Festsetzung

$$v_r \equiv v = \frac{\partial r}{\partial t}, \quad v_\varphi \equiv v\varphi = r\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

den invarianten Weg durchs All:

$$s = ct = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}\,t.$$

Damit lautet die Radialgleichung $\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = c^2$. Weil der Drehimpuls L im Universum konstant ist, vereinfacht sich diese Gleichung mittels

$$v_\varphi = r\dot{\varphi} = \frac{L}{mr}$$

zu

$$\dot{r}^2 + \frac{L^2}{mr^2} = c^2 \quad \text{bzw.} \quad m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} = E.$$

Da die Energie $E = mc^2$ im Universum annähernd null ist, können wir wie folgt umformen:

$$\dot{r}^2 \approx -\frac{L^2}{mr^2} = \frac{i^2L^2}{mr^2} \quad \text{bzw.} \quad \dot{r} = \frac{iL}{\sqrt{m}r}.$$

Integration liefert

$$\int_0^r r\,dr = \frac{iL}{\sqrt{m}}\int_0^t dt,$$

woraus sich die Lösungen

$$r^2 = \frac{2iL}{\sqrt{m}}t \quad \text{bzw.} \quad r^4 + \frac{4L^2}{m}t^2 = 0$$

ergeben. Diesen Ausdruck können wir mittels $r = vt$ umformen zu

$$r^2 + \frac{4L^2}{mr^2}t^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad v^2 + \frac{4L^2}{mr^2} = 0.$$

Die weitere Umformung liefert den klassischen Energieerhaltungssatz der Form

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{2L^2}{r^2} = 0,$$

wobei

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{und} \quad V = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{2L^2}{r^2}$$

die kinetische und potentielle Energie des Alls sind. Dabei ist das Gravitationspotential ϕ gegeben durch

$$\phi(r) = \frac{2L^2}{r}.$$

Damit können wir die Bewegungsgleichungen nochmals wie folgt schreiben:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\partial\phi}{\partial r} = E \approx 0.$$

Aufgelöst nach der Geschwindigkeit v ergibt sich

$$v = \sqrt{\frac{2(E-V)}{m}}.$$

Der Grenzfall $v = c$ bedeutet, daß gelten muß:

$$mc^2 = 2(E-V) \quad \Leftrightarrow \quad V = E/2.$$

Das heißt, daß die potentielle Energie beim nächsten Urknall genau gleich der kinetischen Energie sein muß:

$$V = \frac{E}{2} = \frac{1}{2}mc^2 = T.$$

Daraus folgt der maximale Radius des Weltalls zu

$$r = \frac{2L}{\sqrt{mc}}.$$

Wir können diesen allerdings nicht ohne die Kenntnis der Masse und des Drehimpulses bestimmen. Wenn also das All diesen kritischen Radius erreicht hat, passiert der nächste Urknall.

Im anderen Grenzfall $v = 0$ gilt wegen $T = 0$ die Identität $E = V$ und wegen $E = 0$ ist auch hier $T = V$. Kinetische und potentielle Energie des Alls sind daher in jedem Zeitpunkt gleich, wie für einem auf einer Kreisbahn um ein Zentrum sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegenden Massenpunkt.

Wir sehen also, daß das Weltall innerhalb der Singularität ganz einfachen Gesetzmäßigkeiten gehorcht. Betrachten wir dazu noch einmal die Radialgleichung:

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = c^2.$$

Wenn die radiale Komponente gleich null ist, also $\dot{r} = 0,$ steckt die gesamte Bewegungsenergie in der Drehbewegung, die in diesem Falle maximal ist. Die Winkelgeschwindigkeit des Universums hat dann ihren größten Wert erreicht, und damit sind auch die Zentrifugalkräfte am größten, das Universum beginnt sich auszudehnen:

$$r\dot{\varphi} = c = \frac{s_{pot}}{t_{pot}}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit kann dabei sehr groß werden, aber sie kann nicht unendlich werden, weil der Raum nicht null werden kann:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} = \frac{c}{r}.$$

Ist hingegen die azimutale Komponente null geworden, also $r\dot{\varphi} = 0,$ hat auch die Drehbewegung aufgehört $(\dot{\varphi} = 0)$ und die Bewegungsenergie steckt voll in der Radialbewegung:

$$\dot{r} = c = \frac{s_{kin}}{t_{kin}}.$$

Da es keine Zentrifugalkräfte mehr gibt, kollabiert das Universum unter dem Einfluß der Gravitation zu einer Singularität. Die Geschwindigkeit wird dabei von $v = c$ auf $v = 0$ zurückgesetzt, und die Expansion kann von neuem beginnen. Wegen

$$s = \sqrt{s_{kin}^2 - i^2 s_{kin}^2} \approx 0 \quad \text{und} \quad t = \sqrt{t_{kin}^2 - i^2 t_{kin}^2} \approx 0$$

bzw. $s_{kin} = is_{pot}$ und $t_{kin} = it_{pot}$ gilt stets

$$c = \frac{s_{kin}}{t_{kin}} = \frac{s_{pot}}{t_{pot}}.$$

Raum und Zeit sind also direkt zueinander proportional,[1] das gilt sowohl für die kinetischen als auch die potentiellen Anteile. Angesichts dieser Tatsache noch über eine Verletzung des Energie- und Drehimpulserhaltungssatzes während des Urknalls nachzudenken wirkt dabei mehr wie eine bewußte Verzerrung der Realität zu Gunsten der Metaphysik als ein klares Bekenntnis zu den Grundlagen der Physik.

[1] Genauso wie Energie und Impuls

