Aufgabe: Sie fliegen von Punkt A nach Punkt B, der im Abstand d unter einem Winkel α zu Ihnen liegt und leiten sofort ein Wendemanöver auf einer Standardkurve ein. Ihren Krümmungsradius R können Sie frei wählen. Wenn Sie die Standardkurve ausgeführt haben, fliegen Sie geradlinig mit der Maximalgeschwindigkeit $\vec{v}_a$ an Ihr Ziel. Ihre Geschwindigkeit $\vec{v}_b$, mit der Sie die Standardkurve ausführen, hängt vom Krümmungsradius R ab. Welchen Krümmungsradius $R_{\max}$ müssen Sie wählen, damit Sie so früh wie möglich im Punkt B ankommen? Nach welcher Zeit erreichen Sie Punkt B, wenn der Abstand 2000 m ist und die Peilung 30° beträgt, Ihre Maximalgeschwindigkeit bei 203,5 kn liegt und Ihr Kurvenradius mit einer Abreißgeschwindigkeit von 73,2 kn so eng wie möglich geflogen werden soll?

Lösung: Betrachten wir die relevanten Größen der nachfolgenden Abbildung.

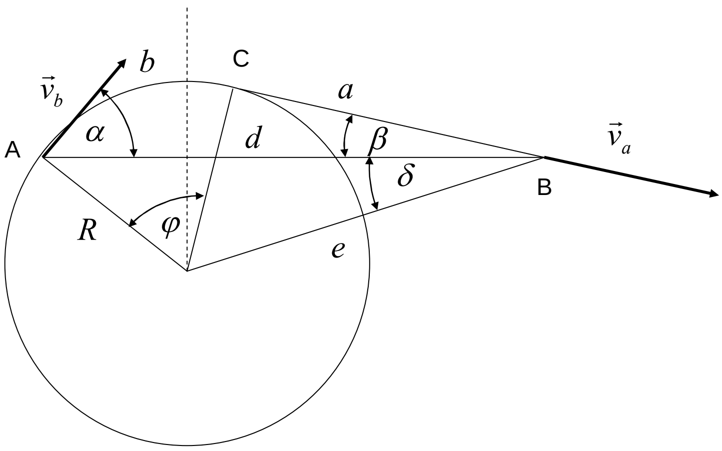

Abbildung 1. Veranschaulichung des Flugpfades

Für die Länge des Kreisbogens b gilt $b = \varphi R$, wobei $\varphi = \alpha + \beta$. Die Entfernung e berechnet sich nach dem Satz des Pythagoras zu

$$e = \sqrt{R^2 \cos^2 \alpha + (d - R \sin \alpha)^2},$$

woraus sofort $a = \sqrt{e^2 - R^2}$ folgt. Für den Winkel $\gamma = \beta + \delta$ gilt

$$\gamma = \arccos \frac{a}{e},$$

wobei wir den Winkel δ mit Hilfe des Kosinussatzes erhalten,

$$\delta = \arccos \frac{d^2 + e^2 - R^2}{2de},$$

womit auch der Winkel β eine feste Größe ist, die nur von R abhängt:

$$\beta = \gamma - \delta = \arccos\frac{\sqrt{e^2 - R^2}}{e} - \arccos\frac{d^2 + e^2 - R^2}{2de}.$$

Die Zeit t bis zum Erreichen des Punktes B ist gegeben durch

$$t = \frac{b}{v_b} + \frac{a}{v_a} = \frac{(\alpha + \beta)R}{v_b} + \frac{\sqrt{e^2 - R^2}}{v_a}$$

mit

$$\beta = \arccos\frac{\sqrt{d^2 - 2dR\sin\alpha}}{\sqrt{d^2 - 2dR\sin\alpha + R^2}} - \arccos\frac{d - R\sin\alpha}{\sqrt{d^2 - 2dR\sin\alpha + R^2}}.$$

Daraus folgt

$$t(R) = \frac{60}{\pi} \times [\mathrm{s}] \cdot \left(\alpha + \arccos\frac{\sqrt{d^2 - 2dR\sin\alpha}}{\sqrt{d^2 - 2dR\sin\alpha + R^2}} - \arccos\frac{d - R\sin\alpha}{\sqrt{d^2 - 2dR\sin\alpha + R^2}} \right) + \frac{\sqrt{d^2 - 2dR\sin\alpha}}{v_a}$$

Im Spezialfall $v_a = v_b$ gilt:

$$t(R) = \frac{60}{\pi} \times [\mathrm{s}] \cdot \left(\alpha + \arccos\frac{\sqrt{d^2 - 2dR\sin\alpha}}{\sqrt{d^2 - 2dR\sin\alpha + R^2}} - \arccos\frac{d - R\sin\alpha}{\sqrt{d^2 - 2dR\sin\alpha + R^2}} \right) + \frac{60}{\pi} \times [\mathrm{s}] \cdot \frac{\sqrt{d^2 - 2dR\sin\alpha}}{R},$$

womit wir eine nur noch vom Krümmungsradius abhängige Funktion haben. Im Falle

$$v_a = \frac{\pi}{60} \times [\mathrm{s}^{-1}] \cdot R_{\max} \quad \text{und} \quad R_{\max} = \frac{d}{2\sin\alpha}$$

ist

$$t(R) = \frac{60}{\pi} \times [\mathrm{s}] \cdot \left(\alpha + \arccos\frac{\sqrt{d^2 - 2dR\sin\alpha}}{\sqrt{d^2 - 2dR\sin\alpha + R^2}} - \arccos\frac{d - R\sin\alpha}{\sqrt{d^2 - 2dR\sin\alpha + R^2}} \right) + \frac{60}{\pi} \times [\mathrm{s}] \cdot \frac{\sqrt{d^2 - 2dR\sin\alpha}}{R_{\max}}.$$

Die Ableitung der Zeit t nach dem Bahnradius R weist im Punkt $R = 0,$ in dem die Funktion t eine Polstelle hat, ein absolutes Extremum auf, wie man durch Differentiation leicht nachrechnet:

$$
\begin{aligned}
t'(R) = {} & \frac{60}{\pi} \times [\mathrm{s}] \cdot \frac{d \sin\alpha}{R\sqrt{d^2 - 2dR\sin\alpha}} \\
& - \frac{60}{\pi} \times [\mathrm{s}] \cdot \frac{\sqrt{d^2 - 2dR\sin\alpha}}{R} \frac{d\sin\alpha - R}{d^2 - 2dR\sin\alpha + R^2} \\
& - \frac{60}{\pi} \times [\mathrm{s}] \cdot \frac{\tan\alpha}{R} \\
& + \frac{60}{\pi} \times [\mathrm{s}] \cdot \frac{d - R\sin\alpha}{R\cos\alpha} \frac{d\sin\alpha - R}{d^2 - 2dR\sin\alpha + R^2} \\
& - \frac{1}{v_a} \frac{d\sin\alpha}{\sqrt{d^2 - 2dR\sin\alpha}}
\end{aligned}
$$

Zur Veranschaulichung sind in Abbildung 2 drei verschiedene Kurven bezüglich des Flugverhaltens wiedergegeben:

a. Das Flugzeug fliegt nach dem Kurvenflug geradlinig mit minimaler Geschwindigkeit (entsprechend der Geschwindigkeit auf dem kleinstmöglichen Krümmungsradius) zum nächsten Wegpunkt (blaue Kurve).
b. Das Flugzeug fliegt nach dem Kurvenflug geradlinig mit der Geschwindigkeit des real geflogenen Krümmungsradius zum nächsten Wegpunkt weiter (rote Kurve).
c. Das Flugzeug fliegt nach dem Kurvenflug ungeachtet der Unstetigkeit geradlinig mit maximaler Geschwindigkeit wie zuvor auf dem real geflogenen Krümmungsradius zum nächsten Wegpunkt weiter (grüne Kurve).

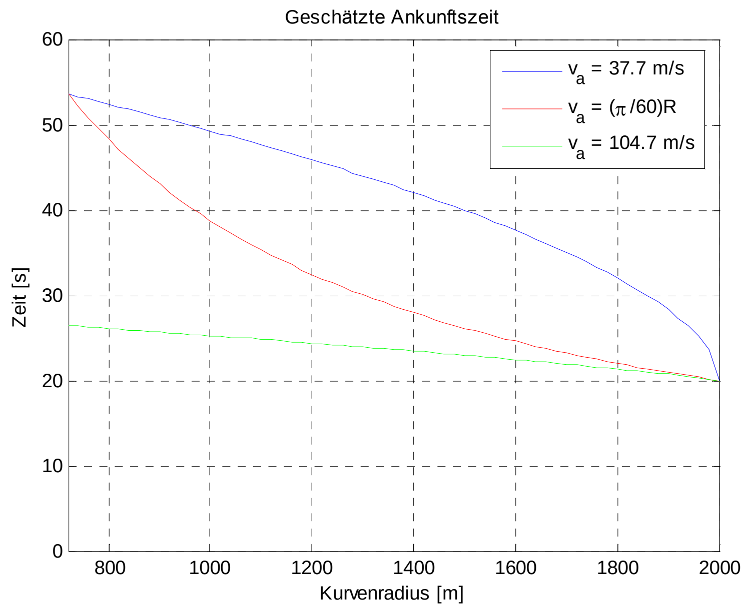

Abbildung 2. Ankunftszeit am nächsten Wegpunkt als Funktion des Kurvenradius

n_z (g)	θ [°]	R [km]	v [m/s]	v [km/h]	v [kn]
1	0	0	0	0	0
1,01	8,1	0,51	26,6	95,6	51,6
1,02	11,4	0,72	37,7	135,6	73,2
1,03	13,9	0,88	46,2	166,4	89,9
1,04	15,9	1,0	53,5	192,7	104,0
1,05	17,8	1,1	60,0	215,9	116,6
1,1	24,6	1,6	85,9	309,1	166,9
1,1455	29,2	2,0	104,7	376,9	203,5
1,2	33,6	2,4	124,3	447,4	241,6
1,3	39,7	3,0	155,6	560,3	302,5
1,4	44,4	3,5	183,6	660,9	356,8
1,5	48,2	4,0	209,5	754,1	407,2
2	60,0	6,2	324,5	1168,2	630,8

Tabelle 1. Lastvielfache, Querneigung, Krümmungsradius und Geschwindigkeiten zum Erreichen des nächsten Wegpunkts

Die in Tabelle 1 angegebenen Größen errechnen wir mit Hilfe von Formeln aus der Flugdynamik. So erhalten wir die Querneigung gemäß

$$\theta = \arccos \frac{1}{n_z},$$

wobei n_z das Lastvielfache für den Kurvenflug ist. Der Krümmungsradius R des Krümmungskreises ergibt sich aus der Querneigung θ, der Drehrate ω und der Erdbeschleunigung g gemäß

$$R = \frac{g \tan \theta}{\omega^2} = \left(\frac{60}{\pi} \right)^2 \times \left[\mathrm{s}^2 \right] \cdot g \tan \theta,$$

wobei wir eine Standardkurve zu Grunde gelegt haben. Die zu fliegende Geschwindigkeit v ist mit dem Krümmungsradius über

$$v = \omega R = \frac{\pi}{60} \times \left[\mathrm{s}^{-1} \right] \cdot R$$

verknüpft. Bei einem Krümmungsradius von $R_{\max} = 2000\ \mathrm{m}$ erreicht man den Wegpunkt B nach genau 20 s. Schneller ist er bei der gegebenen Maximalgeschwindigkeit nicht zu erreichen. Soll eine Standardkurve geflogen werden, die so eng wie möglich ist, und danach mit maximaler Fluggeschwindigkeit aufgeholt werden, so wird der Wegpunkt nach der Zeit $t = 26{,}4\ \mathrm{s}$ erreicht. Wird ein beliebiger Drehradius geflogen, so kann diese Zeit mit Hilfe obiger Formel nur analytisch berechnet werden. Sie liegt aber in jedem Fall zwischen den zwei betrachteten Grenzfällen.