Aufgabe: Markieren Sie auf einem aufgeblasenen Luftballon zwei Punkte und lassen sie danach die Luft heraus. Anschließend blasen Sie den Luftballon mit konstanter Radialgeschwindigkeit erneut auf. Beweisen Sie, daß ein Lichtstrahl, der von einem der Punkte auf der Außenhaut des Ballons ausgeht und längs eines Großkreises zum anderen läuft, diesen nicht eher erreicht, als bis der Ballon aufgeblasen ist.

Hinweis: Im luftleeren Zustand mögen die beiden Punkte des idealisierten Luftballons vor dem Aufblasen im Mittelpunkt zusammenfallen.

Beweis: Sei $\vec{r} = r\vec{e}_r$ der Radiusvektor vom Koordinatenursprung zu einem der beiden Punkte, d.h. zum Anfangspunkt der Bewegung. Weil die Bewegung längst eines Großkreises verläuft, können wir ebene Polarkoordinaten verwenden. Dann lautet die Ableitung des Radiusvektors

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi.$$

Der Radius r sei proportional zur Aufblasgeschwindigkeit v, $r = vt$. Die Radialgeschwindigkeit beträgt demnach $\dot{r} = v$, wobei v konstant sei. Die Bahngeschwindigkeit besteht also aus den zwei linear unabhängigen Komponenten der Radialgeschwindigkeit $\dot{r}$ und der Azimutalgeschwindigkeit $r\dot{\varphi}$ in Richtung wachsender Winkel φ. Der Betrag der Bahngeschwindigkeit ist gleich der Ableitung des Weges nach der Zeit und beträgt

$$\frac{ds}{dt} = \left|\dot{\vec{r}}\right| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}.$$

Der Weg s werde in der Zeit t mit Lichtgeschwindigkeit zurückgelegt, also ist $s = ct$. Die Weglänge erhalten wir durch Integration der Bahngeschwindigkeit gemäß

$$s = \int_0^t \sqrt{v^2 + r^2\dot{\varphi}^2}\,dt = v\int_0^t \sqrt{1 + t^2\dot{\varphi}^2}\,dt.$$

Die Zeit, die wir für das Aufblasen des Luftballons benötigen, sei gleich der Zeit, die der Lichtstrahl braucht, um auf seinem längeren Weg[1] im Zielpunkt einzutreffen, d.h.

$$t = \frac{s}{c} = \frac{v}{c}\int_0^t \sqrt{1 + t^2\dot{\varphi}^2}\,dt.$$

Da Licht sich auch im gekrümmten Raum mit konstanter Bahngeschwindigkeit ausbreitet, gilt

$$\left|\dot{\vec{r}}\right| = v\sqrt{1 + t^2\dot{\varphi}^2} = \text{const.}$$

In diesem Fall darf die Wurzel vor das Integralzeichen gezogen werden,

[1] Da der Ballon sich ausdehnt

$$t = \frac{v}{c}\sqrt{1+t^2\dot{\varphi}^2}\int_0^t dt = \frac{v}{c}\sqrt{1+t^2\dot{\varphi}^2}\,t$$

Nach Kürzen der Zeit auf beiden Seiten verbleibt der Ausdruck

$$1 = \frac{v}{c}\sqrt{1+t^2\dot{\varphi}^2},$$

der außer konstanten Größen nur die zeitabhängige Winkelgeschwindigkeit enthält. Weil in dieser Gleichung alle Größen konstant sind, muß auch das Produkt aus Zeit und Winkelgeschwindigkeit konstant sein, d.h. $t\dot{\varphi} = \text{const}.$ Da die beiden Punkte beim Aufblasen des Luftballons einen konstanten Winkel φ einnehmen, gilt $\dot{\varphi} = 0,$ und aus dem Wegintegral folgen identische Wege: $ct = vt.$ Das ist kein Widerspruch zu $v \neq c,$ da zwei beliebige Punkte, die relativ zu einem festen Zentrum um einen konstanten Winkel auseinanderliegen, die folgende Bedingung erfüllen:

$$\varphi = \frac{s}{r} = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v} \quad \text{bzw.} \quad \frac{v}{c} = \frac{1}{\varphi}.$$

Ändert sich der Winkel, muß sich auch die Geschwindigkeit ändern. Wird der Winkel kleiner als 1 bzw. $57{,}3°$ $(\equiv 180°/pi),$ können durchaus Überlichtgeschwindigkeiten auftreten. Das sollte man bei Berechnungen mittels der Hubble-Konstanten berücksichtigen. Warum das ausgeschlossen werden kann, folgt durch Lösung der Differentialgleichung

$$\varphi = \sqrt{1+t^2\dot{\varphi}^2} \quad \text{bzw.} \quad \varphi^2 = 1+t^2\dot{\varphi}^2,$$

die wir nach Trennung der Variablen schreiben können als

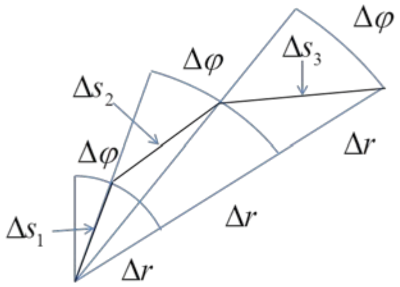
$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2-1}} = \frac{dt}{t}.$$

Unbestimmte Integration führt zu

$$\varphi + \sqrt{\varphi^2-1} = \omega t,$$

wobei ω eine Proportionalitätskonstante ist. Hieraus ergibt sich zwingend $v \leq c.$

Den exakten Weg können wir auch mit Hilfe des Kosinussatzes bestimmen, indem wir ihn wie in der Abbildung ersichtlich polygonartig zerlegen:



Der Kosinussatz für die ersten 3 Wegelemente lautet:

$$\begin{aligned}
\Delta s_1^2 &= \Delta r^2 \\
\Delta s_2^2 &= \Delta r^2 + (2\Delta r)^2 - 2\Delta r(2\Delta r)\cos\Delta\varphi \\
\Delta s_3^2 &= (2\Delta r)^2 + (3\Delta r)^2 - 2(2\Delta r)(3\Delta r)\cos\Delta\varphi
\end{aligned}$$

Daraus leiten wir die allgemeine Rekursionsformel

$$\Delta s_i^2 = ((i-1)\Delta r)^2 + (i\Delta r)^2 - 2(i-1)\Delta r \cdot i\Delta r\cos\Delta\varphi$$

ab, die wir noch weiter vereinfachen können zu

$$\begin{aligned}
\Delta s_i^2 &= \Delta r^2(2i(i-1)+1) - 2i(i-1)\Delta r^2\cos\Delta\varphi \\
&= \Delta r^2 + 2i(i-1)(1-\cos\Delta\varphi)\Delta r^2.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Kosinusnäherung $\cos x \approx 1 - x^2/2$ können wir den Ausdruck noch einmal vereinfachen:

$$\Delta s_i^2 = \Delta r^2\left(1 + i(i-1)\Delta\varphi^2\right).$$

Daraus ziehen wir die Wurzel und erhalten für das allgemeine Linienelement

$$\Delta s_i = \Delta r\sqrt{1 + i(i-1)\Delta\varphi^2}.$$

Mit Hilfe der binomischen Näherung können wir sodann die Wurzel eliminieren:

$$\begin{aligned}
s = \sum_{i=1}^{n}\Delta s_i &= \Delta r\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1 + i(i-1)\Delta\varphi^2} \\
&= \Delta r\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{2}i(i-1)\Delta\varphi^2\right).
\end{aligned}$$

Die erste Summation liefert einen einfachen Ausdruck, die zweite wandeln wir wie folgt um:

$$s = n\Delta r + \frac{1}{2}\Delta r\Delta\varphi^2\sum_{i=1}^{n} i(i-1) = n\Delta r + \frac{1}{2}\Delta r\Delta\varphi^2\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i\right).$$

Die Summen können elementar aufgelöst werden, so daß wir vereinfacht schreiben können:

$$s = n\Delta r + \frac{1}{2}\Delta r\Delta\varphi^2\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right)$$
$$= n\Delta r + \frac{1}{2}\Delta r\Delta\varphi^2 n(n+1)\left(\frac{2n+1}{6} - \frac{1}{2}\right).$$

Damit folgt weiter

$$s = n\Delta r\left(1 + \frac{1}{2}\Delta\varphi^2\frac{(n+1)(n-1)}{3}\right)$$
$$= n\Delta r\left(1 + \frac{1}{6}\Delta\varphi^2\left(n^2 - 1\right)\right)$$
$$\approx n\Delta r\left(1 + \frac{1}{6}(n\Delta\varphi)^2\right).$$

Mit $r = n\Delta r$ und $\varphi = n\Delta\varphi$ ergibt sich die endgültige Formel

$$s = r\left(1 + \frac{1}{6}\varphi^2\right).$$

Für $\varphi = \pi$, d.h. für zwei gegenüberliegende Punkte im Raum bzw. einen Halbkreis auf der Sphäre, erhalten wir damit eine vernünftige Näherung, denn es ist

$$s = r\left(1 + \frac{1}{6}\pi^2\right) = \pi \cdot r\left(\frac{1}{\pi} + \frac{\pi}{6}\right) \approx \pi \cdot r\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{6}\right) = \frac{5}{6}\pi \cdot r \approx \pi \cdot r.$$

