Aufgabe: Zwei Raumfahrer wollen sich im All treffen. Definieren Sie den physikalischen Begriff der Gleichzeitigkeit.

Lösung: Ausgehend von den invarianten Größen

$$s(t,|\vec{r}|)=\sqrt{c^2t^2-|\vec{r}|^2} \quad \text{und} \quad p(E,|\vec{p}|)=\sqrt{\frac{E^2}{c^2}-|\vec{p}|^2}$$

mit

$$|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=vt \quad \text{und} \quad |\vec{p}|=\sqrt{p_x^2+p_y^2+p_z^2}=mv$$

bilden wir zunächst das Produkt aus den potentiellen Anteilen

$$s=\sqrt{c^2t^2-v^2t^2} \quad \text{und} \quad p=\sqrt{\frac{E^2}{c^2}-m^2v^2},$$

d.h.

$$sp=\sqrt{c^2t^2-v^2t^2}\sqrt{\frac{E^2}{c^2}-m^2v^2}.$$

Für $v=0$ sind die Verhältnisse klar, denn dann ist

$$sp=\sqrt{c^2t^2}\sqrt{\frac{E^2}{c^2}}=Et=\hbar$$

und die Wirkung bleibt erhalten. Im allgemeinen Fall, d.h. für $v>0$, wäre $sp<\hbar$, was nicht sein kann. Daraus schließen wir, daß es einen zweiten Term geben muß, damit die Gleichheit wiederhergestellt wird. Wir nennen den soeben abgeleiteten Ausdruck daher potentielle Wirkung und schreiben

$$s_{pot}p_{pot}\equiv\sqrt{c^2t^2-v^2t^2}\sqrt{\frac{E^2}{c^2}-m^2v^2}.$$

Gesucht wird demnach ein Term $s_{kin}p_{kin}$, der die fehlende Wirkung wieder ausgleicht, damit der Erhaltungssatz

$$s_{pot}p_{pot}+s_{kin}p_{kin}=Et=\hbar$$

aufrechterhalten werden kann. Für $v=c$ gilt demnach

$$s_{pot}p_{pot}=\frac{1}{c}\sqrt{c^2t^2-c^2t^2}\sqrt{E^2-m^2c^4}=0,$$

also müßte in diesem Fall

$$s_{kin} p_{kin} = Et = \hbar$$

sein. Wir definieren nunmehr eine Größe $s(v)$, die das geometrische Mittel aus ein- und auslaufender Raumzeitwelle ist, i.e.

$$s(v) = \sqrt{s(c-v)s(c+v)},$$

mit

$$s(c-v) = \left(1 - \frac{v}{c}\right)ct \quad \text{und} \quad s(c+v) = \left(1 + \frac{v}{c}\right)ct$$

derart, daß

$$s(v) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}ct.$$

In ähnlicher Weise setzen wir eine Funktion $p(v)$ als geometrisches Mittel aus ein- und auslaufender Impuls-Energie-Welle fest, i.e.

$$p(v) = \sqrt{p(c-v)p(c+v)},$$

mit

$$p(c-v) = \left(1 - \frac{v}{c}\right)\frac{E}{c} \quad \text{und} \quad p(c+v) = \left(1 + \frac{v}{c}\right)\frac{E}{c}$$

so, daß

$$p(v) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\frac{E}{c}.$$

Insgesamt gilt

$$s(v)p(v) = \sqrt{s(c-v)s(c+v)}\sqrt{p(c-v)p(c+v)} = \sqrt{s(c-v)p(c+v)}\sqrt{s(c+v)p(c-v)}.$$

Da wir nur an reellen Lösungen interessiert sind, folgt aus Symmetriegründen

$$s(v)p(v) = s(c-v)p(c+v) = s(c+v)p(c-v).$$

Eine Raumwelle des gewöhnlichen vierdimensionalen Raums agiert also mit einer Impulswelle des reziproken Raums. Aus Symmetriegründen reicht es, nur einen Fall exemplarisch auszuführen. Wir wählen

$$s(v)p(v) = s(c-v)p(c+v) = \left(1-\frac{v}{c}\right)ct\left(1+\frac{v}{c}\right)\frac{E}{c} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)Et$$

und erhalten nach Umformung

$$s(v)p(v) + \frac{v^2}{c^2}\hbar = Et.$$

Damit ist aus der Gleichung des reziproken Raums $t = \hbar / E$ und der Einsteinschen Energie-Masse-Äquivalenz $E = mc^2$ ersichtlich, daß im allgemeinen Fall

$$s_{pot}p_{pot} = \frac{E}{c}\sqrt{1-\frac{m^2c^4}{E^2}\frac{v^2}{c^2}}ct\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \hbar\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right).$$

Folglich ist

$$s_{pot}p_{pot} + \frac{v^2}{c^2}\hbar = \hbar$$

und damit

$$s_{kin}p_{kin} = \frac{v^2}{c^2}\hbar.$$

Das ergibt zusammen den Satz von der Erhaltung der Wirkung:

$$s_{pot}p_{pot} + s_{kin}p_{kin} = \hbar \quad bzw. \quad E_{pot}t_{pot} + E_{kin}t_{kin} = \hbar.$$

Für die Energie gilt sinngemäß

$$E_{pot} = \frac{s_{pot}p_{pot}}{t_{pot}} \quad \text{und} \quad E_{kin} = \frac{s_{kin}p_{kin}}{t_{kin}}.$$

Setzen wir die potentielle und kinetische Wirkung ein, so folgen für die potentielle und kinetische Energie die Ausdrücke

$$E_{pot} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\hbar}{t_{pot}} \quad \text{und} \quad E_{kin} = \frac{v^2}{c^2}\frac{\hbar}{t_{kin}}.$$

Aus dem Energieerhaltungssatz

$$E = E_{pot} + E_{kin} = \frac{\hbar}{t}$$

ergibt sich weiter

$$\frac{c^2-v^2}{c^2}\frac{\hbar}{t_{pot}}+\frac{v^2}{c^2}\frac{\hbar}{t_{kin}}=\frac{\hbar}{t}$$

und daraus die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Zeit

$$t(v)=c^2\frac{t_{pot}t_{kin}}{(c^2-v^2)t_{kin}+v^2t_{pot}}.$$

Mithin ist

$$t(0)=t_{pot} \quad \text{und} \quad t(c)=t_{kin},$$

was im Einklang mit dem Zeiterhaltungssatz ist:

$$t^2=\frac{s^2}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}t^2=t_{pot}^2+t_{kin}^2 \quad \text{bzw.} \quad t(v)=\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)t^2+\frac{v^2}{c^2}t^2}\,.$$

Eine explizite Abhängigkeit der Zeit von der Geschwindigkeit existiert also nicht. Weiters ergeben sich kinetische und potentielle Zeit zu

$$t_{pot}=\frac{s}{c}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}t\equiv\tau \quad \text{bzw.} \quad t_{kin}=\frac{v}{c}t.$$

Diese sind allerdings geschwindigkeitsabhängig, und zwar beide. Damit folgt

$$t(0)=t \quad \text{und} \quad t(c)=t,$$

d.h. die Zeit ist am Anfang und Ende der Welt identisch. Während die kinetische Zeit indes zunimmt, nimmt die potentielle ab. Wir brauchen uns im folgenden aber nur für die kinetische Zeit der bewegten Masse zu interessieren. Setzen wir die potentielle und kinetische Zeit ein, so folgt für die potentielle und kinetische Energie

$$E_{pot}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}E \quad \text{und} \quad E_{kin}=\frac{v}{c}E$$

bzw.

$$E_{pot}=mc\sqrt{c^2-v^2} \quad \text{und} \quad E_{kin}=mcv.$$

Die kinetische Energie nimmt also mit der Geschwindigkeit zu, die potentielle dementsprechend ab. Wir bilden nunmehr das Produkt aus

$$E=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4\frac{v^2}{c^2}} \quad \text{und} \quad t=\sqrt{\frac{s^2}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}t^2}\,,$$

i.e.

$$Et = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}t^2}.$$

Für $v = 0$ sind die Verhältnisse aufgrund von $E_{kin}t_{kin} = 0$ klar, denn dann gilt für die potentielle Wirkung die Relation

$$E_{pot}t_{pot} = \sqrt{p^2c^2}\sqrt{\frac{s^2}{c^2}} = \sqrt{s^2p^2} = sp = \hbar.$$

Im Falle $v = c$ gilt wegen $s = p = 0$ und damit $E_{pot}t_{pot} = 0$ die Beziehung

$$E_{kin}t_{kin} = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + t^2} = \sqrt{m^2c^4t^2} = Et = \hbar.$$

Es ist also nicht nur das Produkt aus Energie und Zeit eine Erhaltungsgröße, sondern auch die Größen einzeln:

$$ct = s_{pot}(0) + s_{kin}(0) = s_{pot}(c) + s_{kin}(c).$$
$$\frac{E}{c} = p_{pot}(0) + p_{kin}(0) = p_{pot}(c) + p_{kin}(c)$$

Die Erhaltung von Energie und Zeit gilt dabei nicht nur in den Umkehrpunkten, sondern ganz allgemein auch für jede beliebige Geschwindigkeit *v*:

$$c^2t^2 = s_{pot}^2 + v^2t^2 = \frac{\hbar^2c^2}{E^2},$$
$$\frac{E^2}{c^2} = p_{pot}^2 + m^2v^2 = \frac{\hbar^2}{c^2t^2}.$$

Im Ortsraum gilt zu Beginn der kinetischen Zeitrechnung und damit des Universums die Äquivalenzrelation

$$v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (s = s_{pot} = ct \quad \wedge \quad s_{kin} = |\vec{s}| = 0),$$

im Impulsraum entsprechend

$$v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (p = p_{pot} = \frac{E}{c} \quad \wedge \quad p_{kin} = |\vec{p}| = 0).$$

Anhand der Relationen

$$ct = s_{pot}(0) + s_{kin}(0) = s \quad \text{und} \quad \frac{E}{c} = p_{pot}(0) + p_{kin}(0) = p$$

erkennen wir, daß das Universum mit der Wirkung $Et = sp$ beginnt. Am Ende der kinetischen Zeitrechnung und damit des Universums gilt im Ortsraum die Äquivalenzrelation

$$v = c \quad \Leftrightarrow \quad (s = s_{pot} \to 0 \quad \wedge \quad s_{kin} = |\vec{r}| = ct),$$

im Impulsraum entsprechend

$$v = c \quad \Leftrightarrow \quad (p = p_{pot} \to 0 \quad \wedge \quad p_{kin} = |\vec{p}| = mc).$$

Mit den analogen Beziehungen

$$ct = s_{pot}(c) + s_{kin}(c) = |\vec{r}| \quad \text{und} \quad \frac{E}{c} = p_{pot}(c) + p_{kin}(c) = |\vec{p}|$$

folgt am Ende der kinetischen Zeitrechnung die Wirkung $Et = |\vec{r}||\vec{p}|$. In beiden Fällen bleibt also die Wirkung erhalten.

Wenn die kinetische Zeit zu Beginn des Universums demnach gleich null ist, kann die potentielle nur ihren Maximalwert haben. Entscheidend für Massebewegungen ist aber immer die kinetische Zeit. Sie läuft stets von null bis zu ihrem Maximalwert, der mit Erreichen der Lichtgeschwindigkeit angenommen wird. Die potentielle Zeit ist quasi diejenige Zeit, die das Universum für einen Weltzyklus bereithält. Sie ist identisch zur Lebensdauer des Universums. Wenn sie verbraucht ist, beginnt das All von neuem. Sämtliche Informationen über das alte Universum sind damit gelöscht. Das Universum beginnt bei der Geschwindigkeit null und endet mit Lichtgeschwindigkeit. Zu Beginn ist die kinetische Energie noch null, weil noch keine Fahrt aufgenommen wurde. Alle Energie ist zu diesem Zeitpunkt potentielle Energie. Wenn die Masse im Universum in Bewegung kommt, stellt sich Impuls ein, die potentielle Energie nimmt ab. Sie hat ihr Minimum erreicht, sobald sämtliche potentielle Energie in kinetische umgewandelt worden ist. Am Anfang ist nur potentieller Raum vorhanden, der allerdings noch nicht mit Materie gefüllt ist. Der kinetische Raum beginnt sich mit der aufkommenden Geschwindigkeit auszudehnen. Wenn seine Größe den potentiellen Raum erreicht hat, ist letzterer komplett in einer Singularität verschwunden. Das Umgekehrte gilt für die potentielle Energie. Die gesamte Energie ist dann in kinetischer Energie gespeichert, und diese ist am Ende maximal. Da die kinetische Zeit dann ebenfalls maximal ist, kann keine potentielle Zeit mehr vorhanden sein. Beim Urknall wird die gesamte kinetische Zeit vollkommen in potentielle Zeit zurückverwandelt, die Geschwindigkeit des Alls springt von Lichtgeschwindigkeit auf null zurück.[1] Grund ist, daß Energie und Zeit erhalten bleiben. Beide Größen sind zueinander umgekehrt proportional. Wir können daher in der Singularität auch schreiben:

$$Et = E_{kin}t_{kin} + E_{pot}t_{pot} = \frac{v^2}{c^2}\hbar + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\hbar,$$

egal ob $v = 0$ oder $v = c$ ist. Denn nur dann sind die beiden Größen zueinander reziprok, und es ist stets $Et = \hbar$. Es muß also jeweils eine Größe des reziproken Raums mit einer des gewöhnlichen Raums wechselwirken, sonst ist ein Energieübertrag nicht möglich. In welcher Form die Energie dabei vorliegt, spielt offenbar keine Rolle, weil sämtliche Energieformen gleichwertig

[1] Natürlich macht die Natur keine Sprünge.

sind. Für die Zeit gilt das gleiche. Daß sich die Energieformen in der Singularität[2] austauschen, ist eine ganz wesentliche Forderung für das Verständnis der Weltgleichung.

Wir müssen ferner postulieren, daß im Universum alles zur gleichen Zeit entstanden ist. Da Licht aber unterschiedliche Laufzeiten zurückzulegen hat, bis es den Raum durchmessen hat, dauert es auch unterschiedlich lang, bis es zu sehen ist. Wegen der Relativität der Raumzeit sieht ein Beobachter in einer anderen Galaxis unser Universum ebenfalls nicht zu dem Zeitpunkt, wie es jetzt ist, sondern zu der Zeit, zu der umgekehrt wir ihn sehen. Je größer der gegenseitige Abstand, desto früher datiert die Zeit, zu der wir uns gegenseitig sehen. Wir können allerdings nicht bis zum Urknall zurückschauen, denn dazu müßte sich die andere Galaxis mit Lichtgeschwindigkeit von uns wegbewegen. Wir würden uns dann auch selbst sehen können bzw. wir würden einen Zustand sehen, wie das All in seinem Urzustand ausgesehen hat, da der Raum in sich geschlossen ist. Da derzeit noch keine Galaxie entdeckt wurde, die sich auch nur annähernd mit Lichtgeschwindigkeit bewegt,[3] verbleibt dem Universum noch etwas Zeit, denn wenn wir tatsächlich bis zum Urknall zurückschauen könnten, würden wir uns ja selbst mit Lichtgeschwindigkeit bewegen und der Urknall stünde unmittelbar bevor, weil die kinetische Zeit abgelaufen ist. Wir müssen daher annehmen, daß unsere Geschwindigkeit noch weit von der Lichtgeschwindigkeit entfernt ist und wir auf Erden niemals bis zum Urknall werden zurückblicken können, es sei denn, wir erhöhen unsere Reisegeschwindigkeit durchs All und nähern uns der des Lichts. Dann gibt es allerdings kein Zurück mehr in die Vergangenheit, denn man kann stets nur in die Zukunft reisen. Wir können unser Raumschiff nur in dem Sinne abbremsen, daß wir unsere Geschwindigkeit nicht weiter erhöhen, sondern konstant halten. Durch die Ausdehnung des Alls bleibt jedoch keine Geschwindigkeit konstant, sondern wächst weiter an. Das würden wir daran merken, daß die Galaxien um uns herum eine viel höhere Geschwindigkeit erreicht haben, während wir meinen, scheinbar zum Stillstand gekommen zu sein. Im Besitz dieses Wissens müssen wir uns mit unserem Raumfahrerkollegen vorher absprechen, bei welcher Geschwindigkeit relativ zum Inertialsystem wir uns begegnen wollen, denn andernfalls verfehlen wir uns in dem Sinne, daß wir dann beide nicht mehr das gleiche Alter hätten, wenn wir uns wiedersehen. Der Unterschied in der Geschwindigkeit darf nicht größer sein, als es einem Menschenleben entspricht.

Gleichzeitig wollen wir daher Ereignisse nennen, die die gleiche Geschwindigkeit v relativ zum Inertialsystem haben. Auf die Differenzgeschwindigkeit kommt es hierbei nicht an, denn der Andromedanebel ist genauso alt wie die am schnellsten sich von uns fortbewegende Galaxie (wenn wir ihr Alter um den zurückgelegten Weg des Lichts korrigieren), er ist uns im Raum nur näher gelegen.

Wenn der potentielle Raum in der Singularität verschwunden ist, d.h. wenn $s = 0$, folgt aus

$$s^2 = c^2t^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

[2] Und auch ganz allgemein

[3] Bei der zuletzt beobachteten Galaxie, die eine Geschwindigkeit von 89 Prozent der Lichtgeschwindigkeit haben soll, kann es sich offenbar nur um einen Meßfehler handeln, weil ihr Äußeres ja schon einen vollständigen Spiralnebel ausgebildet hat, was einem so frühen Zeitpunkt des Universums widerspricht.

die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2.$$

Sie beschreibt die äußersten Grenzen des Alls. Da die Zeit t konstant ist, ist dies die Gleichung einer Kugelsphäre, auf der jeder Punkt aufgrund der Krümmung erreicht werden kann. Den Radius ct des Alls können wir in kinetische und potentielle Anteile zerlegen, i.e.

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t_{kin}^2 + c^2 t_{pot}^2.$$

Dabei beschreibt die Sphäre

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c^2 t_{kin}^2$$

genau den Raum, in dem wir uns aktuell aufhalten, denn setzen wir die kinetische Zeit

$$t_{kin} = \frac{v}{c} t$$

ein, so erhalten wir den kinetischen Raum

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = v^2 t^2,$$

in dem die Zeit immer noch konstant ist, dessen Radius aber wegen der Expansionsgeschwindigkeit v zunehmend größer wird. Gleichzeitig können wir einen potentiellen Raum

$$x^2 + y^2 + z^2 - \left(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2\right) = c^2 t_{pot}^2$$

definieren, der aufgrund der zunehmenden Geschwindigkeit in einer Singularität enden muß. Wir müssen dazu einfach drei Koordinaten u, w und l einführen, derart daß

$$u = \sqrt{x^2 - \xi^2}, \quad w = \sqrt{y^2 - \eta^2}, \quad l = \sqrt{z^2 - \zeta^2}.$$

Dies liefert uns wegen

$$t_{pot} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t$$

ebenfalls eine Sphäre, deren Radius aber nicht expandiert, sondern umgekehrt abnimmt:

$$u^2 + w^2 + l^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) c^2 t^2.$$

Wenn wir also ein Rendezvous im All planen, müssen wir immer streng darauf achten, daß wir uns zur selben kinetischen Zeit, die alleine von der Geschwindigkeit v abhängt, wieder treffen, sonst werden wir einander möglicherweise nicht mehr wiedererkennen.

