Aufgabe: Beweisen Sie, daß unser All aus der Entropie seines Vorgänger-Universums entstanden ist, und daß die Zeit ein geschlossener Kreis ist, der in derselben Singularität beginnt und endet.

Beweis: Die Eigenwerte der Klein-Gordon-Gleichung der Raumzeit

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = \left(\frac{E}{c} + |\vec{p}|\right)\left(\frac{E}{c} - |\vec{p}|\right)$$

sind gegeben durch

$$p = \frac{E}{c} + |\vec{p}| \quad \text{und} \quad p = \frac{E}{c} - |\vec{p}|.$$

Diese können wir mittels $|\vec{p}| = mv,\ E = mc^2$ und der Definition der reduzierten Masse

$$\mu \equiv m\frac{v}{c}$$

umformen in

$$p = mc\left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad \text{und} \quad p = mc\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

bzw.

$$E = pc + |\vec{p}|c \quad \text{und} \quad E = pc - |\vec{p}|c.$$

Dabei ist $E_{kin} = |\vec{p}|c = mvc = \mu c^2$ die kinetische Energie und $E_{pot} = pc$ die potentielle Energie. Die Energie selbst hat also zwei Anteile, einen Materieanteil und einen Strahlungsanteil. Von den beiden Lösungen, die sich als Wurzeln einer quadratischen Gleichung wie folgt zusammenfassen lassen:

$$E^2 = p^2c^2 - |\vec{p}|^2 c^2,$$

ist nur die mit dem positiven Vorzeichen physikalisch sinnvoll. Sie liefert uns den gewöhnlichen Energieerhaltungssatz:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \mu c^2 + pc.$$

Beide Lösungen

$$E - \mu c^2 = pc \quad \text{und} \quad E + \mu c^2 = pc$$

erfüllen als Produkt die Energie-Impuls-Relation

$$\left(E-\mu c^2\right)\left(E+\mu c^2\right)=E^2-\mu^2c^4=p^2c^2$$

oder umgeformt

$$E^2=\mu^2c^4+p^2c^2.$$

Damit lassen sich Energie und Masse durch die reduzierte Masse ausdrücken:

$$E=\frac{pc}{\sqrt{1-\mu^2/m^2}} \quad \text{oder} \quad m=\frac{p}{c\sqrt{1-\mu^2/m^2}}.$$

Die äquivalente klassische Darstellungsweise

$$E=\frac{pc}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \text{oder} \quad m=\frac{p}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

ist im Grunde unzulässig, weil dabei Raumzeit-Größen mit Energie-Impuls-Größen verknüpft werden.

Für $v=0$ ist die kinetische Energie $E_{kin}=mvc=0$ und $E=E_{pot}$, während für $v=c$ die potentielle Energie $E_{pot}=0$ ist und damit $E=E_{kin}$. Den Energieerhaltungssatz können wir damit wie folgt formulieren:

$$E=E_{kin}+E_{pot}=\mu c^2+mc^2\sqrt{1-\mu^2/m^2}.$$

In der Ortsdarstellung lautet der Energiesatz dagegen

$$E=E_{kin}+E_{pot}=mvc+mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Das gleiche Verfahren können wir auch auf den reziproken Raum anwenden. Das Eigenwertproblem der Klein-Gordon-Gleichung des reziproken Raums

$$s^2=c^2t^2-\left|\vec{r}\right|^2=\left(ct+\left|\vec{r}\right|\right)\left(ct-\left|\vec{r}\right|\right)$$

hat die Lösungen

$$ct+\left|\vec{r}\right|=s \quad \text{und} \quad ct-\left|\vec{r}\right|=s.$$

Diese Ausdrücke formen wir mittels $\left|\vec{r}\right|=vt$ um in

$$s=tc\left(1+\frac{v}{c}\right) \quad \text{und} \quad s=tc\left(1-\frac{v}{c}\right).$$

Dabei ist

$$t_{kin} = \frac{|\vec{r}|}{c} = \frac{v}{c}t$$

die kinetische Zeit und

$$t_{pot} = \frac{s}{c}$$

die potentielle Zeit, womit der Zeiterhaltungssatz geschrieben werden kann als

$$t = t_{kin} + t_{pot} = \frac{v}{c}t + \frac{s}{c}.$$

Die beiden Lösungen erfüllen die Raum-Zeit-Relation

$$s^2 = c^2t^2\left(1+\frac{v}{c}\right)\left(1-\frac{v}{c}\right) = c^2t^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = c^2t^2 - v^2t^2$$

oder umgeformt

$$t^2 = \frac{v^2}{c^2}t^2 + \frac{s^2}{c^2}.$$

Damit läßt sich die Zeit durch die Geschwindigkeit ausdrücken:

$$t = \frac{s}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Mit der Definition der kinetischen Zeit als Eigenzeit

$$\tau \equiv t\frac{v}{c}$$

können wir die letzte Gleichung in Analogie zur Energie-Impuls-Relation auch schreiben als

$$t^2 = \tau^2 + \frac{s^2}{c^2}.$$

Für $v = 0$ ist die kinetische Zeit $t_{kin} = 0$ und $t = t_{pot}$, während für $v = c$ die potentielle Zeit $t_{pot} = 0$ ist und damit $t = t_{kin}$.

Die letzte Gleichung ist im übrigen ganz ähnlich zur Masse-Impuls-Relation

$$m^2 = \mu^2 + \frac{p^2}{c^2},$$

die sich aus der Energie-Impuls-Relation herleitet.

Mit den obigen Definitionen folgt aus der Klein-Gordon-Gleichung des reziproken Raums der sogenannte „Zeiterhaltungssatz“ in der Ortsdarstellung:

$$t = t_{kin} + t_{pot} = \frac{v}{c}t + t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

In der Impulsdarstellung lautet diese Beziehung

$$t = t_{kin} + t_{pot} = \frac{\mu}{m}t + t\sqrt{1-\frac{\mu^2}{m^2}}.$$

Aus Symmetriegründen wandeln wir den Energiesatz in den Massenerhaltungssatz um und schreiben ihn in der Ortsdarstellung:

$$m = m_{kin} + m_{pot} = m\frac{v}{c} + m\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

was in der Impulsdarstellung

$$m = m_{kin} + m_{pot} = \mu + m\sqrt{1-\mu^2/m^2}$$

entspricht.

In der Singularität der Raumzeit ist also wegen $v = 0$ und $\mu = 0$

$$\Delta p = \frac{1}{c}\sqrt{\langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2} = \sigma_p = 0 \quad \text{bzw.} \quad \langle E^2\rangle = \langle E\rangle^2 = 0$$

eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung. In dieser Singularität[1] steckt die gesamte Raumzeit des Universums.[2] Die Wellenfunktion der Raumzeit hat für $\sigma_p = 0$ ihre maximale Amplitude erreicht,

$$\psi(t, \vec{r}) = \lim_{\sigma_p \to 0,} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3 \sigma_p^3} \int e^{-\frac{\vec{p}^2}{2\sigma_p^2}} d^3p = 1,$$

während die Amplitude des reziproken Raums wegen

$$\Delta s = c\sqrt{\langle t^2\rangle - \langle t\rangle^2} = \sigma \to \infty \quad \text{bzw.} \quad \langle t\rangle = \tau = 0$$

abgeklungen ist:

$$\Phi(0, 0) = \lim_{\sigma \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3 \sigma^3} \int e^{-\frac{\vec{r}^2}{2\sigma^2}} d^3r = 0.$$

[1] Deltafunktion
[2] D.h. die gesamte Entropie

Die Weltwellenfunktion verschwindet ebenfalls:

$$\Psi(t,0,0,\vec{r}) = \Phi(0,0)\psi(t,\vec{r}) = 0$$

In der Singularität[3] des Energie-Impuls-Raums hingegen ist wegen $v = c$

$$\Delta s = c\sqrt{\langle t^2\rangle - \langle t\rangle^2} = \sigma = 0 \quad \text{bzw.} \quad \langle t^2\rangle = \langle t\rangle^2 = \tau^2$$

eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung des reziproken Raums. In dieser Singularität stecken die gesamte Energie und der gesamte Impuls des Universums. Die Amplitude der Wellenfunktion

$$\Phi(E,\vec{p}) = \lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3\sigma^3}\int e^{-\frac{\vec{r}^2}{2\sigma^2}} d^3r = 1$$

ist maximal, während die Amplitude der Raumzeit wegen

$$\Delta p = c\sqrt{\langle m^2\rangle - \langle m\rangle^2} = \sigma_p \to \infty$$

auf null abgeklungen ist:

$$\psi(0,0) = \lim_{\sigma_p\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3\sigma_p^3}\int e^{-\frac{\vec{p}^2}{2\sigma_p^2}} d^3p = 0.$$

Die Weltwellenfunktion verschwindet identisch:

$$\Psi(0,E,\vec{p},0) = \Phi(E,\vec{p})\psi(0,0) = 0.$$

Damit haben wir gezeigt, daß wegen

$$\Psi(t,0,0,\vec{r}) = \Psi(0,E,\vec{p},0) = 0$$

Anfang und Ende der Welt identisch sind.

Zum Zeitpunkt des Urknalls, d.h. wenn die gesamte träge Masse noch keine Geschwindigkeit aufgenommen hat, weil $v = \langle m\rangle = \langle t\rangle = 0$, wobei auch die Mittelwerte $\langle s\rangle = 0$ und $\langle p\rangle = 0$ identisch verschwinden und die quadratischen Schwankungen vereinfacht geschrieben werden können als

$$\Delta s = \sqrt{\langle s^2\rangle} \quad \text{und} \quad \Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle},$$

kann die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im All nur aufrechterhalten werden, wenn

[3] d.h. Polstelle

$$c^2 = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{\langle m^2 \rangle \langle t^2 \rangle}}.$$

Betrachten wir nun den allgemeinen Fall, so können wir die Heisenbergsche Unschärferelation aufgrund der Expansion des Weltalls wie folgt schreiben:

$$\Delta s \Delta p = \sqrt{\langle s^2 \rangle - \langle s \rangle^2} \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \frac{\hbar}{2}.$$

Damit gilt generell sowohl

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \langle t^2 \rangle - \langle |\vec{r}| \rangle^2} = c\sqrt{\langle t^2 \rangle - \langle \tau \rangle^2} \neq 0$$

als auch

$$\Delta p = \sqrt{\frac{\langle E^2 \rangle}{c^2} - \langle |\vec{p}| \rangle^2} = c\sqrt{\langle m^2 \rangle - \langle \mu \rangle^2} \neq 0.$$

Der Term

$$c^2 = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{\langle t^2 \rangle - \langle \tau \rangle^2} \sqrt{\langle m^2 \rangle - \langle \mu \rangle^2}}$$

muß dann wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ebenfalls konstant sein. Ersetzen wir die Masse durch die Energie, folgt aus der Orts-Impuls-Unschärferelation die Energie-Zeit-Unschärferelation

$$\Delta E \Delta t = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle \mu \rangle^2 c^4} \sqrt{\langle t^2 \rangle - \langle \tau \rangle^2} = \frac{\hbar}{2}.$$

Durch Vergleich mit

$$\Delta E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2} \quad \text{bzw.} \quad \Delta t = \sqrt{\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2}$$

erhalten wir

$$\langle m \rangle = \langle \mu \rangle \quad \text{und} \quad \langle t \rangle = \langle \tau \rangle.$$

Ferner kann man mittels der Beziehung

$$\left(\langle t^2 \rangle - \langle \tau \rangle^2\right)\left(\langle m^2 \rangle - \langle \mu \rangle^2\right) = \langle m^2 \rangle \langle t^2 \rangle$$

zeigen, daß

$$\left\langle m^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \mu \right\rangle^2 \quad \text{und} \quad \left\langle t^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \tau \right\rangle^2.$$

Daran erkennen wir, daß die Vorzeichen unter der Wurzel beide Male vertauscht werden müssen, weil sonst die Ausdrücke negativ werden. Für das Plancksche Wirkungsquantum folgt daraus die Relation

$$\hbar = \left\langle \tau \right\rangle \left\langle \mu \right\rangle c^2 = \left\langle mv \right\rangle \left\langle tv \right\rangle = \left\langle |\vec{r}| \right\rangle \left\langle |\vec{p}| \right\rangle = \left\langle E_{kin} \right\rangle \left\langle t_{kin} \right\rangle$$

und somit als Naturgesetz die Erhaltung der kinetischen Wirkung. Offenbar ist also $\hbar$ nichts anderes als der Betrag des Drehimpulses im Grundzustand des Universums, nämlich genau ein Wirkungsquantum. Da das Produkt der Eigenwerte von Weg und Impuls nur der halben Wirkung entspricht,

$$\frac{\hbar}{2} = sp = E_{pot} t_{pot},$$

folgt aus der Differenz von kinetischer und potentieller Wirkung die Relation

$$E_{kin} t_{kin} - E_{pot} t_{pot} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} Et = \frac{\hbar}{2}.$$

Damit lautet der Satz von der Erhaltung der Wirkung

$$E_{kin} t_{kin} = E_{pot} t_{pot} + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} Et.$$

Dies läßt sich umformen in

$$mv^2 t - \frac{1}{2} mv^2 t = E_{pot} t_{pot}$$

und mit $t = t_{kin} + t_{pot}$ weiter vereinfachen zu

$$\frac{1}{2} mv^2 t_{kin} + \frac{1}{2} mv^2 t_{pot} = E_{pot} t_{pot}.$$

Aus dem Wirkungserhaltungssatz folgt schließlich durch Umformung

$$E_{kin} t_{kin} - E_{pot} t_{pot} = \frac{1}{2} mv^2 t_{kin} + \frac{1}{2} mv^2 t_{pot}$$

oder anschaulicher

$$\left(E_{kin} - \frac{1}{2} mv^2 \right) t_{kin} = \left(E_{pot} + \frac{1}{2} mv^2 \right) t_{pot}.$$

Für $v = 0$ ergibt sich daraus die Erhaltung der Wirkung in der Singularität:

$$E_{kin}t_{kin} = E_{pot}t_{pot},$$

und für $v = c$ folgt

$$E_{kin}t_{kin} - E_{pot}t_{pot} = \frac{1}{2}mc^2\left(t_{pot} + t_{kin}\right) = \frac{1}{2}Et.$$

Da die Wirkung zu Beginn und am Ende des Universums erhalten bleiben muß, gilt $Et \to 0,$ also ist wahlweise entweder $E = 0,$ womit die Zeit unendlich wird, oder $t = 0,$ womit die Energie unendlich wird. Das ist im achtdimensionalen Raum nur einmal der Fall, nämlich zu Beginn und Ende der Wirkung, weil das Universum mit maximaler Entropie, also mit null Energie, beginnt und mit minimaler Entropie, d.h. maximaler Energie, endet. Hierbei ist die Zeit im selben Moment im Ortsraum unendlich und gleich darauf null, da der Ortsraum zum Zeitpunkt des Urknalls schlagartig verschwindet und gleich wieder neu entsteht. Gleiches gilt auch für den Impulsraum. In unserer nichtrelativistischen Welt sind wir es gewohnt, daß ein beim senkrechten Wurf in die Höhe geworfener Körper sich ersichtlich verlangsamt und beim anschließenden freien Fall allmählich wieder Fahrt aufnimmt. Stellen wir uns vor, der Körper würde mit Lichtgeschwindigkeit geworfen, dann geht die Zeit nach Erreichen des Umkehrpunkts schlagartig gegen null, weil die Gravitationsbeschleunigung genauso schnell unendlich wird. Alles andere wäre auch äußerst verwunderlich, z.B. ein Beginn aus dem Nichts oder ein Ende im Nichts. Energie verbraucht sich nicht, sie ändert nur ihr Gesicht. Das Universum beginnt chaotisch als Raumzeit-Singularität im Ortsraum mit gleichverteilter Masse und Energie, d.h. maximaler Entropie, wobei

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = c\sqrt{\langle m^2\rangle - \mu^2} = \sigma_p \to 0 \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{\langle E^2\rangle} = 0,$$

sowie mit Nullamplitude im Impulsraum, wobei

$$\Delta s = \sqrt{\langle s^2\rangle - \langle s\rangle^2} = c\sqrt{\langle t^2\rangle - \tau^2} = \sigma \to \infty \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{\langle t^2\rangle} \to \infty.$$

Dies ist konsistent dazu, daß kinetische Zeit und Energie wegen $v = 0$ verschwinden, i.e.

$$\tau = t\frac{v}{c} = 0 \quad \text{und} \quad \mu = m\frac{v}{c} = 0.$$

Das Universum endet für $v = c$ als Energie-Impuls-Singularität mit minimaler Entropie im Impulsraum, d.h. als Kosmos nicht mehr vorhandener Zeitunschärfe:

$$\Delta s = \sqrt{\langle s^2\rangle - \langle s\rangle^2} = c\sqrt{\langle t^2\rangle - \langle t\rangle^2} = c\Delta t = \sigma \to 0 \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{\langle t^2\rangle} = \langle t\rangle,$$

während Raum und Zeit gleichverteilt im Ortsraum verschwinden,

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = c\sqrt{\langle m^2\rangle - \langle m\rangle^2} = c\Delta m = \sigma_p \to \infty \quad \text{bzw.} \quad \Delta E \to \infty.$$

Da die maximale Energieunschärfe eine minimale Zeitunschärfe zur Folge hat,[4] kann die Energie-Impuls-Singularität nur in eine Raumzeit-Singularität im Ortsraum kollabieren, wobei die gesamte darin enthaltene Energie wieder in anfänglich gleichverteilte maximale Entropie eines heißen Gases im Ortsraum konvertiert wird.

Es müssen also zu Beginn des Universums, wenn die Raumzeit noch in der Singularität steckt, die energetischen Fluktuationen besonders gering sein, während die zeitlichen besonders groß sein müssen, damit die Wirkung erhalten bleiben kann. Am Ende des Universums hingegen, wenn die Energie aufgebraucht und die Masse verschwunden ist, müssen die Energiefluktuationen besonders groß werden[5], während die zeitlichen Fluktuationen dann sehr gering sein können. Unmittelbar vor dem nächsten Urknall gilt also

$$\left\langle t^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle t \right\rangle^2 \quad \text{und} \quad \left\langle \tau \right\rangle = \left\langle t \right\rangle$$

bzw.

$$\left\langle m^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle m \right\rangle^2 \quad \text{und} \quad \left\langle \mu \right\rangle = \left\langle m \right\rangle,$$

d.h. Anfang und Ende des Universums fallen wegen der Erhaltung der Wirkung in einer einzigen Singularität zusammen und die Zeit ist ein Kreis, wobei die Energie für das neue Universums durch den Abbau von Entropie gewonnen wird. Das Universum beginnt also jedesmal aufs neue im Chaos und endet in kosmischer Ordnung. Am Anfang ist noch kein Kosmos, sondern eine heiße diffuse Ursuppe aus Wasserstoff. Die anfänglichen Gasmassen ziehen sich bei sinkender Temperatur unter dem Einfluß der Gravitation zu Galaxien, Sternhaufen und Sonnensystemen zusammen und können am Ende sogar Leben hervorbringen. Welchen Drehsinn der Drehimpuls des Alls besitzt, kann man vielleicht mit der Frage beantworten, warum es nur linksdrehende Aminosäuren gibt, wo doch chemisch nichts gegen rechtsdrehende spräche. Auf jeden Fall gewinnen wir durch diese Erkenntnis ein besseres Verständnis der Zeit, die ja nichts anderes ist als ein lebender Beweis für das Wirken der Entropie: Entropie offenbart sich nicht nur im Ablauf der Zeit, sie ist auch ein Maß für dunkle Energie bzw. dunkle Materie, wie sie in den uns bekannten Schwarzen Löchern gespeichert ist. Mit der Umwandlung von Energie in Entropie in einer Art Energy Reset geht jegliche Erinnerung an das frühere Universum verloren. Das muß auch so sein, da nichts über den Ereignishorizont hinausgelangen kann und auch das All nicht schneller expandieren kann als das Licht.

[4] Null kann die Wirkung nie werden, da sie stets ein Plancksches Wirkungsquantum beträgt.
[5] Groß genug, um einen neuen Raum aufzuspannen

