Aufgabe: Leiten Sie die universelle achtdimensionale „Weltgleichung“ her und begründen Sie, welche Auswirkungen das auf den sogenannten Urknall hat.

Lösung: Formen wir die Klein-Gordon-Gleichung der Raumzeit

$$\left(\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+d\hat{p}^2\right)\psi(t,\,x,\,y,\,z)=0,$$

entsprechend um, so folgt in abgekürzter Notation

$$\left(-\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\hbar^2\nabla^2\right)\psi(t,\,\vec{r})=d\hat{p}^2\psi(t,\,\vec{r}).$$

Darin ist $d\hat{p}=\Delta p$ der Vierer-Laplace-Operator und Δp die relativistische Impulsunschärfe. Ähnlich formen wir die Klein-Gordon-Gleichung des reziproken Raums

$$\left(c^2\frac{\partial^2}{\partial E^2}-\frac{\partial^2}{\partial p_x^2}-\frac{\partial^2}{\partial p_y^2}-\frac{\partial^2}{\partial p_z^2}+\frac{d\hat{s}^2}{\hbar^2}\right)\Phi(E,\,p_x,\,p_y,\,p_z)=0$$

mit den bekannten Abkürzungen entsprechend um in

$$\left(-\hbar^2c^2\frac{\partial^2}{\partial E^2}+\hbar^2\nabla_p^2\right)\Phi(E,\,\vec{p})=d\hat{s}^2\Phi(E,\,\vec{p}).$$

Hierin ist $d\hat{s}=\Delta s$ der Vierer-Laplace-Operator des Orts und Δs die relativistische Ortsunschärfe. Die Raum-Zeit- bzw. die Impuls-Masse-Unschärfe sind dabei gegeben durch

$$\Delta s=c\Delta\tau \quad \text{und} \quad \Delta p=c\Delta m,$$

mit

$$\Delta s=\sqrt{c^2\langle t^2\rangle-\langle|\vec{r}|\rangle^2} \quad \text{und} \quad \Delta p=\sqrt{\frac{\langle E^2\rangle}{c^2}-\langle|\vec{p}|\rangle^2}.$$

Ferner ist

$$\Delta s\Delta p=c^2\Delta m\Delta\tau=\Delta E\Delta\tau=\frac{\hbar}{2}$$

die gewöhnliche Heisenbergsche Orts-Impuls- bzw. Energie-Zeit-Unschärferelation im Grundzustand. Multiplizieren wir die beiden rechten und linken Seiten der Klein-Gordon-Gleichungen der Raumzeit und des reziproken Raums, erhalten wir die „Weltgleichung“

$$\left(-\hbar^2c^2\frac{\partial^2}{\partial E^2}+\hbar^2\nabla_p^2\right)\left(-\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\hbar^2\nabla^2\right)\Phi(E,\,\vec{p})\psi(t,\,\vec{r})=d\hat{s}^2d\hat{p}^2\Phi(E,\,\vec{p})\psi(t,\,\vec{r}).$$

Mit der Weltwellenfunktion

$$\Psi(t, E, \vec{p}, \vec{r}) = \Phi(E, \vec{p})\psi(t, \vec{r})$$

und durch Substitution der Vierer-Laplace-Operatoren können wir die Weltgleichung schreiben als

$$\left\{\left(-\hbar^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial E^2} + \hbar^2 \nabla_p^2\right)\left(-\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2 \nabla^2\right) - \Delta s^2 \Delta p^2\right\}\Psi(t, E, \vec{p}, \vec{r}) = 0$$

bzw. nach Umformung

$$\left\{\left(-c^2 \frac{\partial^2}{\partial E^2} + \nabla_p^2\right)\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right) - \frac{\Delta s^2 \Delta p^2}{\hbar^4}\right\}\Psi(t, E, \vec{p}, \vec{r}) = 0.$$

Die Weltgleichung entspricht dem Drehimpulserhaltungssatz des Universums, der auch in der Singularität gilt und dort aufgrund fehlender Achsen nicht als Vektor definiert werden kann. Einsetzen der Unschärferelation und Ausführen der Ableitungen bringt uns der Lösung keinen Schritt näher:

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial E^2 \partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla_p^2 - c^2 \frac{\partial^2}{\partial E^2}\nabla^2 + \nabla_p^2 \nabla^2 - \frac{1}{4}\right)\Psi(t, E, \vec{p}, \vec{r}) = 0.$$

Da diese partielle Differentialgleichung 4. Ordnung jedoch separierbar ist, reicht es, die beiden Klein-Gordon-Gleichungen für die Raumzeit und den reziproken Raum separat zu lösen. Da jeder Punkt im Raum Mittelpunkt ist und die Mittelwerte des Universums identisch verschwinden, erhalten wir mittels

$$\Delta s^2 \Delta p^2 = \sigma^2 \sigma_p^2 = \frac{\hbar^2}{4}$$

die äquivalenten Darstellungen der Raumzeit

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{\sigma_p^2}{\hbar^2}\right)\psi(t, \vec{r}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{1}{4\sigma^2}\right)\psi(t, \vec{r}) = 0$$

und des reziproken Raums

$$\left(c^2 \frac{\partial^2}{\partial E^2} - \nabla_p^2 + \frac{\sigma^2}{\hbar^2}\right)\Phi(E, \vec{p}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(c^2 \frac{\partial^2}{\partial E^2} - \nabla_p^2 + \frac{1}{4\sigma_p^2}\right)\Phi(E, \vec{p}) = 0,$$

wobei wir in allen drei Raumrichtungen gleiche Standardabweichungen zugrunde gelegt haben. Die Lösungen, von denen die eine die Fouriertransformierte der anderen ist, lauten

$$\psi(t,\vec{r})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}^{3}\sigma_{p}^{3}}\int e^{-\frac{\vec{p}^{2}}{2\sigma_{p}^{2}}}e^{\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\cdot\vec{r})}d^{3}p \quad \text{bzw.} \quad \Phi(E,\vec{p})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}^{3}\sigma^{3}}\int e^{-\frac{\vec{r}^{2}}{2\sigma^{2}}}e^{\frac{i}{\hbar}(tE-\vec{r}\cdot\vec{p})}d^{3}r.$$

Abschließend diskutieren wir noch die Grenzfälle dieser Lösungen in der Singularität. Ist die Ortsunschärfe gleich null und die Raumzeit singulär, so gilt

$$\left(\Delta s=0 \quad \Leftrightarrow \quad c^{2}=\frac{d\vec{r}^{2}}{dt^{2}}\right) \quad \wedge \quad \left(\Delta p\rightarrow\infty \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dE^{2}}{dt^{2}}-d\vec{p}^{2}=c^{2}\,d\mu^{2}\rightarrow\infty\right).$$

Die Größe μ ist die sogenannte Eigenmasse, welcher in der gewöhnlichen Relativitätstheorie die Eigenzeit τ entspricht. Ist umgekehrt die Impulsunschärfe gleich null und der reziproke Raum singulär, haben wir

$$\left(\Delta p=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{c^{2}}=\frac{d\vec{p}^{2}}{dE^{2}}\right) \quad \wedge \quad \left(\Delta s\rightarrow\infty \quad \Leftrightarrow \quad c^{2}dt^{2}-d\vec{r}^{2}=c^{2}\,d\tau^{2}\rightarrow\infty\right).$$

In jedem Fall befindet sich zu Beginn und am Ende eines jeden periodischen Universums nur der achtdimensionale Raum in einer Singularität, weil entweder die Raumzeit oder der reziproke Raum in der Singularität steckt, während der jeweils andere Raum eine Polstelle aufweist. Da die Gesamtlösung das Produkt der beiden separaten Lösungen der Weltgleichung ist, muß dieses Produkt aus Nullstelle und Polstelle immer noch eine Singularität ergeben. Das Universum ist getrieben von der Masse-Impuls-Äquivalenz einerseits und der Raum-Zeit-Äquivalenz andererseits,[1] i.e.

$$c^{2}m^{2}=\mu^{2}c^{2}+p^{2} \quad \text{und} \quad c^{2}t^{2}=\tau^{2}c^{2}+s^{2},$$

wobei natürlich die Masse

$$m=\frac{E}{c^{2}}$$

die fundamentale Größe in der Natur ist, nicht die Energie. Das Ganze läßt sich schlußendlich auch differentiell schreiben:

$$dm^{2}=d\mu^{2}+\frac{dp^{2}}{c^{2}} \quad \text{und} \quad dt^{2}=d\tau^{2}+\frac{ds^{2}}{c^{2}},$$

mit

$$d\mu^{2}=\frac{d\vec{p}^{2}}{c^{2}} \quad \text{und} \quad d\tau^{2}=\frac{d\vec{r}^{2}}{c^{2}},$$

womit eine vollständige Vereinheitlichung von Strahlung und Materie gelungen ist. Da die Varianz bzw. Unschärfe nie wirklich null werden kann, weil der Wert Unendlich nicht definiert

[1] Also nicht bloß der Energieerhaltung

ist und der Drehimpuls des Universums nicht wirklich null werden kann, unterliegen Zeit und Energie auch in der Singularität Fluktuationen, die größer sein müssen als null. Da Zeitfluktuationen in der Singularität auch ins frühere Universum zurückreichen, wird man schwerlich argumentieren können, das All sei im Zeitnullpunkt entstanden, genauswenig wie es vorher keine Energie gegeben haben soll. Die Singularität als Punkt existiert nur in der Vorstellungswelt der Mathematiker, sie ist in der physikalischen Realität der Fourier-Transformationen nicht vorhanden. Man kann daher in Analogie zu Heraklit[2] durchaus sagen: „Alles zerfällt." Somit kann die Quantenmechanik nicht länger argumentieren, es gäbe sogenannte Aufenthaltswahrscheinlichkeiten eines Teilchens, wo doch die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in der Singularität bei hundert Prozent liegt, also sowohl Ort und Impuls dort gleichzeitig scharf gemessen werden können, weil dieses System sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt und somit stillsteht. Warum also sollte das zu irgendeinem Zeitpunkt im Universum anders sein?

[2] Der gesagt haben soll: „Alles fließt"

