Aufgabe: Berechnen Sie die Eigenwerte der Klein-Gordon-Gleichungen und diskutieren Sie die Lösungen.

Lösung: Die relativistische Energie E kann keine Erhaltungsgröße sein, weil nach der Energie-Impuls-Relation ein masseabhängiger Term auftaucht, der aufgrund des Massenerhaltungssatzes eigentlich konstant sein müßte und den es in dieser Form gar nicht geben dürfte:

$$\frac{1}{c^2}E^2 = p^2 + m^2c^2.$$

Vergleichen wir den Energieerhaltungssatz mit der Viererdarstellung der relativistischen Raumzeit, i.e.

$$c^2t^2 = s^2 + x^2 + y^2 + z^2,$$

so erkennen wir, daß wir aus diesem Dilemma nur herauskommen, indem wir definieren:

$$m^2c^2 \equiv p_x^2 + p_y^2 + p_z^2,$$

und damit zu einem Viererimpuls p gelangen, in dem die Masse keine Bedeutung mehr hat.[1] Damit lassen sich die beiden Gleichungen dann auch völlig symmetrisieren:

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{1}{c^2}E^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2, \\ s^2 &= c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \end{aligned}$$

Im Falle der Klein-Gordon-Gleichung des gewöhnlichen vierdimensionalen Raums ist das differentielle Wegelement gegeben durch

$$\begin{aligned} dp^2 &= \frac{1}{c^2}dE^2 + i^2dp_x^2 + i^2dp_y^2 + i^2dp_z^2 \\ &= \left(\frac{\partial p}{\partial E}\right)^2 dE^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial p_x}\right)^2 dp_x^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial p_y}\right)^2 dp_y^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial p_z}\right)^2 dp_z^2, \end{aligned}$$

wobei wir durch Koeffizientenvergleich die Invarianten

$$\frac{1}{c^2} = \left(\frac{\partial p}{\partial E}\right)^2, \quad i^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial p_x}\right)^2, \quad i^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial p_y}\right)^2, \quad i^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial p_z}\right)^2$$

erhalten, die nur in Viererdarstellung einen Sinn ergeben. Einerseits folgt mit Hilfe des Energieoperators und der Impulsoperatoren

[1] Ein Photon hat ohnehin keine Masse, wohl aber einen Impuls.

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

aus dem Differential des quadrierten Viererimpulses im Raum die Relation

$$\begin{aligned} dp^2 &= d\left(\frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 \right) \\ &= d\left(-\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right), \end{aligned}$$

also

$$d\left(\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + p^2 \right) = 0,$$

d.h. der Ausdruck

$$\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + p^2 = \mathrm{const}$$

ist invariant. Wir zeigen, daß diese Konstante gleich null sein muß. Dazu begründen wir zunächst, warum auch das Differential von p^2 invariant sein muß. Dies ergibt sich ganz logisch aus der Invarianz von

$$\frac{1}{2s} dp^2 = dp.$$

Aus dem relativistischen Viererimpuls

$$p = \sqrt{\frac{1}{c^2} E^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2}$$

folgt das totale Differential

$$dp = \frac{\partial p}{\partial E} dt + \frac{\partial p}{\partial p_x} dp_x + \frac{\partial p}{\partial p_y} dp_y + \frac{\partial p}{\partial p_z} dp_z$$

mit den partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial E} &= \frac{E / c^2}{\sqrt{E^2 / c^2 - \vec{p}^2}}, \quad & \frac{\partial p}{\partial p_x} &= -\frac{p_x}{\sqrt{E^2 / c^2 - \vec{p}^2}}, \\ \frac{\partial p}{\partial p_y} &= -\frac{p_y}{\sqrt{E^2 / c^2 - \vec{p}^2}}, \quad & \frac{\partial p}{\partial p_z} &= -\frac{p_z}{\sqrt{E^2 / c^2 - \vec{p}^2}}. \end{aligned}$$

Damit kann das totale Differential wie folgt geschrieben werden:

$$dp = \frac{(E/c^2)dE - \vec{p}d\vec{p}}{\sqrt{E^2/c^2 - \vec{p}^2}} = \frac{(E/c^2)dE - \vec{p}d\vec{p}}{p} = \frac{dE}{pc}\left(\frac{E}{c} - \vec{p}c\frac{d\vec{p}}{dE}\right).$$

Wegen

$$\frac{1}{2p}dp^2 = dp = \frac{dE}{p}\left(\frac{E}{c^2} - \vec{p}\frac{d\vec{p}}{dE}\right)$$

ist auch $p = p_0 = E/c - \vec{p}c(d\vec{p}/dE)$ eine Invariante der Bewegung. Daher kann

$$dp^2 = 2dE\left(\frac{E}{c^2} - \vec{p}\frac{d\vec{p}}{dE}\right)$$

nur dann verschwinden, wenn $E/c^2 = \vec{p}(d\vec{p}/dE)$ bzw. $p_0 = 0,$ d.h. wenn der vierdimensionale Raum eine Singularität besitzt.[2] Für $E = 0$ muß klarerweise auch $p_x = p_y = p_z = 0$ sein, sonst wäre

$$p = \sqrt{-\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)}$$

imaginär, was physikalisch nicht sinnvoll wäre. Folglich können wir die Operatorgleichung in der Singularität nullsetzen und es folgt die lorentzinvariante Klein-Gordon-Gleichung der Raumzeit:

$$\left(\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + p^2\right)\psi(t, x, y, z) = 0,$$

wobei $p = mc$ der Viererimpuls ist. Mit

$$\mathbf{A} = -\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2\nabla^2 = \left(i\frac{\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} + i\hbar\nabla\right)\left(i\frac{\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} - i\hbar\nabla\right) = \left(\frac{\hat{E}}{c} - \hat{\mathbf{p}}\right)\left(\frac{\hat{E}}{c} + \hat{\mathbf{p}}\right)$$

haben wir folgendes Eigenwertproblem zu lösen:[3]

$$\mathbf{A}\psi(t, x, y, z) = m^2c^2\psi(t, x, y, z).$$

Die Eigenwerte entsprechen gemäß

$$E^2 - \vec{p}^2c^2 = (E + |\vec{p}|c)(E - |\vec{p}|c) = m^2c^4$$

den Lösungen

$$E + |\vec{p}|c = mc^2 \quad \text{und} \quad E - |\vec{p}|c = mc^2$$

---

[2] Das muß möglich sein, wenn die Raumausdehnung zu einer Zeit Null beginnt.

[3] Nicht völlig konsequent verwenden wir noch einmal die Masse anstatt des Viererimpulses.

Sie fallen zusammen für $|\vec{p}| = 0,$ wobei von den Wurzeln nur eine physikalisch sinnvoll ist, nämlich die mit dem negativen Vorzeichen, i.e. $E = |\vec{p}|c.$ Die andere Lösung datiert zurück in das vergangene Universum, welches abgelaufen ist.

Im Falle der Klein-Gordon-Gleichung des reziproken Raums verfahren wir völlig analog. Das differentielle Wegelement ist gegeben durch

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2dt^2 + i^2dx^2 + i^2dy^2 + i^2dz^2 \\ &= \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 dt^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 dy^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2 dz^2, \end{aligned}$$

wobei wir wieder durch Koeffizientenvergleich die Invarianten

$$c^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2, \quad i^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2, \quad i^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2, \quad i^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2$$

erhalten, die nur in Viererdarstellung einen Sinn ergeben. Andererseits gilt mit Hilfe der Operatoren für Zeit und Ort

$$\hat{t} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial E}, \quad \hat{x} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_x}, \quad \hat{y} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_y}, \quad \hat{z} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_z}$$

für das Differential des quadrierten Wegs im Raum die Relation

$$ds^2 = d\left(c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2\right) = d\left(-c^2\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial E^2} + \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial p_y^2} + \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial p_z^2}\right),$$

d.h.

$$d\left(c^2\frac{\partial^2}{\partial E^2} - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial p_y^2} - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial p_z^2} + s^2\right) = 0$$

und der Ausdruck

$$c^2\frac{\partial^2}{\partial E^2} - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial p_y^2} - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial p_z^2} + s^2 = \mathrm{const}$$

ist invariant. Wir zeigen nun, daß diese Konstante gleich null sein muß. Dazu begründen wir zunächst, warum auch das Differential von s^2 invariant sein muß. Das ergibt sich aus der Invarianz von

$$\frac{1}{2s}ds^2 = ds.$$

Aus der relativistischen Weglänge

$$s = \sqrt{c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2}$$

folgt das totale Differential

$$ds = \frac{\partial s}{\partial t}dt + \frac{\partial s}{\partial x}dx + \frac{\partial s}{\partial y}dy + \frac{\partial s}{\partial z}dz$$

mit den die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{c^2 t}{\sqrt{c^2t^2 - \vec{r}^{\,2}}}, \quad \frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{c^2t^2 - \vec{r}^{\,2}}}, \quad \frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{c^2t^2 - \vec{r}^{\,2}}}, \quad \frac{\partial s}{\partial z} = -\frac{z}{\sqrt{c^2t^2 - \vec{r}^{\,2}}}.$$

Damit können wir das totale Differential wie folgt schreiben:

$$ds = \frac{c^2 t dt - \vec{r} d\vec{r}}{\sqrt{c^2t^2 - \vec{r}^{\,2}}} = \frac{c^2 t dt - \vec{r} d\vec{r}}{s} = \frac{c dt}{s}\left(ct - \frac{\vec{r}\vec{v}}{c}\right).$$

Wegen der Invarianz von

$$\frac{1}{2s}ds^2 = ds = \frac{dt}{s}\left(c^2 t - \vec{r}\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

ist auch $s = s_0 = ct - (\vec{v}/c)\vec{r}$ eine Invariante der Bewegung. Daher kann

$$ds^2 = 2dt\left(c^2 t - \vec{r}\vec{v}\right)$$

nur dann verschwinden, wenn $ct = (\vec{v}/c)\vec{r}$ bzw. $s_0 = 0,$ d.h. wenn auch der vierdimensionale reziproke Raum eine Singularität besitzt.[4] Für $t = 0$ muß klarerweise auch $x = y = z = 0$ sein, sonst wäre

$$s = \sqrt{-\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}$$

imaginär, was physikalisch nicht sein kann. Damit können wir auch die Operatorgleichung gleich null setzen und es folgt die Klein-Gordon-Gleichung des reziproken Raums als eine gewöhnliche homogene Wellengleichung:

$$\left(c^2\frac{\partial^2}{\partial E^2} - \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} - \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} - \frac{\partial^2}{\partial p_z^2} + \frac{s^2}{\hbar^2}\right)\Phi\left(E, p_x, p_y, p_z\right) = 0.$$

Mit der Matrixdarstellung

$$\mathbf{A}_p = -\hbar^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial E^2} + \hbar^2 \nabla^2 = \left(i\hbar c\frac{\partial}{\partial E} - i\hbar\nabla_p\right)\left(i\hbar c\frac{\partial}{\partial E} + i\hbar\nabla\right) = \left(c\hat{t} - \hat{\mathbf{r}}\right)\left(c\hat{t} + \hat{\mathbf{r}}\right)$$

[4] Diesen Fall muß es geben, wenn Raum und Zeit einen Anfang haben.

haben wir folgendes Eigenwertproblem zu lösen:

$$\mathbf{A}_p \Phi(E,\, p_x,\, p_y,\, p_z) = s^2 \Phi(E,\, p_x,\, p_y,\, p_z).$$

Die Eigenwerte entsprechen gemäß

$$c^2 t^2 - \vec{r}^{\,2} = (ct - |\vec{r}|)(ct + |\vec{r}|) = s^2$$

den Lösungen

$$ct - |\vec{r}| = s \quad \text{und} \quad ct + |\vec{r}| = s.$$

Sie fallen zusammen für $r = 0,$ wobei von den übrigen Lösungen nur die Wurzel mit dem negativen Vorzeichen physikalisch sinnvoll ist, nämlich $ct = |\vec{r}|.$ Die andere Lösung würde zeitlich in die Vergangenheit zurückführen, d.h. in ein früheres Universum. Beide Wellen träfen sich in diesem Falle in der Singularität und würden sich beim Urknall gegenseitig auslöschen. Wenn das erlaubt wäre, hätte es nie einen Urknall gegeben.

