Home | Startseite | Impressum | Kontakt | Gästebuch

Aufgabe: Zeigen Sie, daß es keine Masse im Sinne der Einsteinschen Energie-Masse-Äquivalenz gibt, und daß der achtdimensionale Raum kein Kontinuum darstellt, sondern quantisiert ist.

Lösung: Ähnlich wie der relativistische Vierervektor der Raumzeit

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

kann man auch einen relativistischen Viererimpuls definieren, und zwar durch Umformung der Energie-Impuls-Beziehung:

$$m^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2.$$

Am Vergleich erkennen wir, daß der Viererimpuls p gegeben sein muß durch

$$p^2 = m^2c^2,$$

und daß die Masse nichts anderes ist als der Quotient

$$m \equiv \frac{p}{c}.$$

Da die Lichtgeschwindigkeit eine Naturkonstante ist, die ggf. auch auf 1 gesetzt werden kann, ist Masse nichts anderes als Impuls, also $p = mc$. Die Einsteinsche Masse-Energie-Äquivalenz

$$E = mc^2$$

mag zwar nach dem gleichen Argument gelten, aber sie ist definitiv verkehrt. Es empfiehlt sich daher, überall in der Physik die Vereinfachung zu treffen und die Masse durch den Impuls zu ersetzen. Die Masse ist ein überholter Begriff aus der klassischen Newtonschen Mechanik. Sie wird weder im vierdimensionalen Impuls-Energie-Spektrum länger benötigt noch im vierdimensionalen Raum-Zeit-Spektrum[1].

Mit obiger Substitution nimmt also die Energie-Impuls-Beziehung folgende Form an:

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)$$

Darin sind E und $\vec{p}$ die Operatoren

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{p}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z},$$

[1] Das wohlgemerkt kein Kontinuum ist

womit sich als erste der beiden gekoppelten Differentialgleichungen die Klein-Gordon-Gleichung der Raumzeit ergibt:

$$\left\{\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\frac{p^2}{\hbar^2}\right\}\psi(t,\vec{r})=0$$

Mittels der Substitution $p=\hbar k$ und des Laplace-Operators können wir vereinfacht schreiben:

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\Delta+k^2\right)\psi(t,\vec{r})=0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet

$$\psi(t,\vec{r})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}^3\sigma_{p,x}\sigma_{p,y}\sigma_{p,z}}\int e^{-\frac{p_x^2}{2\sigma_{p,x}^2}}e^{-\frac{p_y^2}{2\sigma_{p,y}^2}}e^{-\frac{p_z^2}{2\sigma_{p,z}^2}}e^{\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\cdot\vec{r})}d^3p.$$

Darin sind die Normalverteilungen Deltafunktionen, die am Ende der Expansion des Universums in Gleichverteilungen enden. Lösungen für rücklaufende Wellen sind aufgrund der Entropierichtung physikalisch nicht sinnvoll. Aufgrund der Invarianz des infinitesimalen Wegelements

$$ds^2=c^2\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial E^2}=c^2\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial E^2}-\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial p_x^2}+\frac{\partial^2}{\partial p_y^2}+\frac{\partial^2}{\partial p_z^2}\right)=c^2d\tau^2$$

folgt ebenfalls die Klein-Gordon-Gleichung des reziproken Raums:

$$\left\{\frac{c^2\partial^2}{\partial E^2}-\left(\frac{\partial^2}{\partial p_x^2}+\frac{\partial^2}{\partial p_y^2}+\frac{\partial^2}{\partial p_z^2}\right)+\frac{s^2}{\hbar^2}\right\}\Phi(E,\vec{p})=0,$$

wobei wir auch hier mittels $s=\hbar r$ entsprechend vereinfachen können:

$$\left(\frac{c^2\partial^2}{\partial E^2}-\Delta_p+r^2\right)\Phi(E,\vec{p})=0.$$

Die Klein-Gordon-Gleichung des reziproken Raums hat die Lösung

$$\Phi(E,\vec{p})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}^3\sigma_x\sigma_y\sigma_z}\int e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}}e^{\frac{i}{\hbar}(tE-\vec{r}\cdot\vec{p})}d^3r,$$

ihre Interpretation ist völlig analog zur Lösung der Klein-Gordon-Gleichung der Raumzeit. Wenn das Universum zu Beginn seiner Existenz einer Singularität entsprungen ist, so muß aufgrund der Relationen $t=x=y=z=0$ auch das invariante Wegelement $s=0$ sein. Notwendig muß daher das Universum auch wieder in einer Singularität enden, d.h. nach Ablauf seines Lebens besitzt es das Alter

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{c},$$

welche Ausdehnung es zu diesem Zeitpunkt auch immer erreicht haben mag. Umgekehrt ist am Ende des Weltzyklus der Impuls in der Singularität verschwunden, also folgt aus denselben Annahmen, i.e. $E = p_x = p_y = p_z = 0,$ daß auch der Viererimpuls $p = 0$ sein muß. Dem steht zu Beginn des Weltalters eine Anfangsenergie

$$E = c\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$$

gegenüber, wobei die Gesamtenergie gleichbleibt. Lediglich die Entropie kehrt ihre Richtung um. Zischen Anfang und Ende gilt die Invarianz von Raumzeit und Impulsenergie gleichermaßen, und damit verharrt das Universum für die Dauer seiner Existenz vollständig in einer Singularität. Es wird nie größer als ein verschwindender Punkt. Der Eindruck, daß sich das Weltall ausdehnt und größer wird, entsteht nur im dreidimensionalen Raum, nicht jedoch in vier Dimensionen, wo sich der euklidische Raum vom dynamisch sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitenden Raum wieder subtrahiert. Wenn das Weltall in der Raumzeit seine maximale Größe erreicht hat und sich mit finaler Lichtgeschwindigkeit bewegt, ist es im reziproken Raum vollständig in der Singularität verschwunden, und umgekehrt. Im achtdimensionalen Raum existiert das Anschaulichkeitsproblem nicht, weil null in der Welt der Physik nicht gleich null ist, sondern auch eine Differenz zweier gleich großer Größen darstellen kann, so wie $0 = 1 + (-1) = 1 - 1$ ist. Ähnlich gilt

$$s_0 = s_1 + s_{-1} = s_1 - s_1 = 0 \quad \text{und} \quad p_0 = p_1 + p_{-1} = p_1 - p_1 = 0.$$

Im realen Universum merken wir von dieser Raum- und Impulsteilung nichts, denn die beiden Teilräume sind durch die undurchdringliche Wand der Raumkrümmung voneinander getrennt. Auf jeden Fall können wir zeigen, daß der achtdimensionale Raum vollständig in Einheiten des Planckschen Wirkungsquantums quantisiert ist. Die vier Quantisierungsgrößen lauten:

$$E = \hbar\omega, \quad t = \hbar\omega_E, \quad p = \hbar k, \quad s = \hbar r,$$

mit der Energiekreisfrequenz

$$\omega_E = \frac{2\pi}{E}.$$

Mithin gibt es keine physikalische Größe im achtdimensionalen Raum, die nicht quantisiert wäre. Daran erkennen wir, daß nicht die Energie die primäre Größe der Raumzeit ist, sondern der Impuls, und im reziproken Raum nicht die Zeit, sondern der Ort. Die Definition einer Masse ist jedoch zu keiner Zeit notwendig.

