Aufgabe: Lösen Sie die Klein-Gordon-Gleichung für den gesamten Raum in einer Dimension.

Lösung: Die eindimensionale Klein-Gordon-Gleichung der Raumzeit lautet:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{m^2c^4}{\hbar^2}\right)\psi(t,x)=0.$$

Dies ist eine partielle homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung. Ihre Lösung ist gegeben durch

$$\psi(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{p,x}}\Re\int e^{-\frac{p_x^2}{2\sigma_{p,x}^2}}e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x-Et)}dp_x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{p,x}}\int e^{-\frac{p_x^2}{2\sigma_{p,x}^2}}\cos\frac{p_x x-Et}{\hbar}dp_x.$$

Die zweite zeitliche Ableitung lautet

$$\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial t^2}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{p,x}}\int\frac{E^2}{\hbar^2}e^{-\frac{p_x^2}{2\sigma_{p,x}^2}}\cos\frac{p_x x-Et}{\hbar}dp_x,$$

während die zweite partielle Ableitung nach dem Ort gegeben ist durch

$$\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{p,x}}\int\frac{p_x^2}{\hbar^2}e^{-\frac{p_x^2}{2\sigma_{p,x}^2}}\cos\frac{p_x x-Et}{\hbar}dp_x.$$

In die Klein-Gordon-Gleichung eingesetzt erhalten wir

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{p,x}\hbar^2}\int\left(-E^2+p_x^2c^2+m^2c^4\right)e^{-\frac{p_x^2}{2\sigma_{p,x}^2}}\cos\frac{p_x x-Et}{\hbar}dp_x=0,$$

was aber wegen der Energie-Impuls-Relation für eine Dimension

$$E^2=m^2c^4+c^2p_x^2$$

identisch erfüllt ist. Auch der Imaginärteil stellt eine Lösung dar,

$$\psi(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{p,x}}\Im\int e^{-\frac{p_x^2}{2\sigma_{p,x}^2}}e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x-Et)}dp_x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{p,x}}\int e^{-\frac{p_x^2}{2\sigma_{p,x}^2}}\sin\frac{p_x x-Et}{\hbar}dp_x,$$

und erfüllt die Klein-Gordon-Gleichung, so daß wir schreiben können:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{p,x}\hbar^2}\int\left(E^2-m^2c^4-p_x^2c^2\right)e^{-\frac{p_x^2}{2\sigma_{p,x}^2}}e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x-Et)}dp_x=0.$$

Es gibt nebenbei auch Lösungen mit einem positiven Vorzeichen im Exponenten der Exponentialfunktion, i.e.

$$\psi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{p,x}} \int e^{-\frac{p_x^2}{2\sigma_{p,x}^2}} e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x + Et)} dp_x,$$

jedoch sind diese physikalisch unsinnig, weil eine rückläufige Welle erstens zur Auslöschung führen würde und zweitens die Richtung der Zeit durch die Entropie vorgegeben ist.

In jedem Fall schließt die Lösung stetig an die Singularität an, denn es gilt

$$\psi(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{p,x}} \int e^{-\frac{p_x^2}{2\sigma_{p,x}^2}} dp_x = 1.$$

