Aufgabe: Lösen Sie die Klein-Gordon-Gleichung in der Singularität der Raumzeit. Was schließen Sie daraus für das Weltall?

Lösung: Die relativistische Klein-Gordon-Gleichung lautet in einer Dimension

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(x,t)=\frac{4\hat{E}_{kin}^2}{\hbar^2}\psi(x,t)=\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi(x,t).$$

In der Singularität für $m=0$ folgt daraus die eindimensionale homogene Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,t)=0,$$

deren Lösung gegeben ist durch

$$\psi(x,t)=\Re\int f(p_x)e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x-Et)}dp_x=\int f(p_x)\cos\frac{p_x x-Et}{\hbar}dp_x.$$

Die erste Ortsableitung der Wellenfunktion ist

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}=\int f(p_x)\frac{\partial}{\partial x}\cos\frac{p_x x-Et}{\hbar}dp_x=-\frac{1}{\hbar}\int f(p_x)p_x\sin\frac{p_x x-Et}{\hbar}dp_x,$$

und die zweite Ableitung lautet

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}=-\frac{1}{\hbar}\int f(p_x)p_x\frac{\partial}{\partial x}\sin\frac{p_x x-Et}{\hbar}dp_x=-\frac{1}{\hbar^2}\int f(p_x)p_x^2\cos\frac{p_x x-Et}{\hbar}dp_x.$$

Die erste zeitliche Ableitung ergibt sich zu

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=\int f(p_x)\frac{\partial}{\partial t}\cos\frac{p_x x-Et}{\hbar}dp_x=\frac{E}{\hbar}\int f(p_x)\sin\frac{p_x x-Et}{\hbar}dp_x,$$

gefolgt von der zweiten

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}=\frac{E}{\hbar}\int f(p_x)\frac{\partial}{\partial t}\sin\frac{p_x x-Et}{\hbar}dp_x=-\frac{E^2}{\hbar^2}\int f(p_x)\cos\frac{p_x x-Et}{\hbar}dp_x.$$

In die Klein-Gordon-Gleichung eingesetzt erhalten wir

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,t)=\frac{1}{\hbar^2}\int f(p_x)\left(\frac{E^2}{c^2}-p_x^2\right)\cos\frac{p_x x-Et}{\hbar}dp_x=0,$$

woraus sich wegen $E=p_x c$ die Wellenfunktion in ihrer einfachsten Form ergibt:

$$\psi(x,t)=\int f(p_x)\cos\frac{E(x-ct)}{\hbar c}dp_x=\left\{\int f(p_x)dp_x\right\}\cos\frac{E(x-ct)}{\hbar c}.$$

In der Singularität selbst gilt

$$\psi(0,0)=\int f(p_x)dp_x.$$

Nehmen wir die Amplitudenverteilung normalverteilt bzw. gaußförmig an, so können wir den Betrag der Wellenfunktion mittels der Definition

$$f(p_x)\equiv\delta(p_x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{p,x}}e^{-\frac{p_x^2}{2\sigma_{p,x}^2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x}{\hbar}e^{-\frac{2x^2p_x^2}{\hbar^2}}$$

in der Singularität auf eins normieren:

$$\psi(0,0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x}{\hbar}\int e^{-\frac{2x^2p_x^2}{\hbar^2}}dp_x=1.$$

Mit Annahme einer Gaußverteilung aufgrund stochastischer Zerfallsprozesse von Ort und Impuls, Energie und Zeit haben wir zugleich impliziert, daß die Wellenfunktion aufgrund der Unschärferelation in der Lage ist, die Potentialbarriere der Singularität zu durchtunneln.

Folglich erhalten wir mittels

$$\psi(x,t)=\psi(0,0)\cos\frac{E(x-ct)}{\hbar c}.$$

eine spezielle Lösung der homogenen Klein-Gordon-Gleichung. Die Sinusfunktion

$$\psi(x,t)=\psi(0,0)\sin\frac{E(x-ct)}{\hbar c}$$

ist ebenfalls eine Lösung, so daß wir die allgemeine Lösung in komplexer Notation schreiben können als

$$\psi(x,t)=\psi(0,0)e^{i\frac{E(x-ct)}{\hbar c}}.$$

Die konjugiert-komplexe Wellenfunktion

$$\overline{\psi}(x,t)=\overline{\psi}(0,0)e^{-i\frac{E(x-ct)}{\hbar c}}$$

benötigen wir zur Bildung des Betragsquadrates über das Produkt

$$\psi(x,t)\overline{\psi}(x,t)=\psi(0,0)\overline{\psi}(0,0)e^{i\frac{E(x-ct)}{\hbar c}}e^{-i\frac{E(x-ct)}{\hbar c}}.$$

Damit können wir auf eins normieren:

$$|\psi(x,t)|^2=\psi(x,t)\overline{\psi}(x,t)=\psi(0,0)\overline{\psi}(0,0)=|\psi(0,0)|^2=1,$$

womit die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen irgendwo in der Raumzeit zu finden, genauso groß ist wie in der Singularität, nämlich 100 %, d.h. im Weltall geht kein Teilchen verloren und es kann keines hinzukommen. Da heißt natürlich auch, daß das Weltall nicht entstanden sein kein, weil der Betrag der Wellenfunktion zu jedem Zeitpunkt und an jedem Ort des Weltalls gleich groß ist. Das ist konsistent damit, daß das Universum auch wieder in einer Singularität verschwinden muß, ehe es zu einer erneuten Expansion kommen kann.

