Aufgabe: Erläutern Sie, warum die Schrödingergleichung die Quantenmechanik nicht korrekt beschreibt und leiten Sie die korrekte Gleichung her.

Lösung: Die Schrödingergleichung kann nicht aus der klassischen Physik hergeleitet werden, sondern ist ein Postulat. Außerdem ist eine nichtrelativistische Quantenmechanik nicht realistisch, da die Elektronen in Atomen mit hoher Protonen- und Neutronenzahl in den Bereich der Lichtgeschwindigkeit kommen. Die grundlegende Annahme der Quantenmechanik, daß sich kinetische und potentielle Energie im Hamilton-Operator linear addieren, ist im übrigen nach der Einsteinschen Energie-Impuls-Relation falsch. Sie addieren sich gemäß

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$$

vielmehr quadratisch. Diese Addition muß ferner nach dem Welle-Teilchen-Dualismus im Einklang mit der Wellengleichung sein. Verwenden wir die quantenmechanischen Operatoren für Energie und Impuls, i.e.

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x},$$

so lautet die obige Beziehung

$$-\frac{\hbar^2\partial^2}{c^2\partial t^2} = m^2c^2 - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Diese können wir wie folgt umformen,

$$m^2c^2 = \frac{\hbar^2\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2\partial^2}{c^2\partial t^2},$$

und einen Operator für die kinetische Energie definieren, allerdings quadratisch:

$$\hat{E}_{kin}^2 = \frac{m^2c^2}{4} = \frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right).$$

Diesen wenden wir auf die Ortswellenfunktion $\psi = \psi(x,t)$ an:

$$\hat{E}_{kin}^2\psi(x,t) = \frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(x,t).$$

Sofort erkennen wir, daß daraus in der Singularität für $m = 0$ die eindimensionale Wellengleichung folgt:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,t) = 0,$$

und nicht die Schrödingergleichung. Es gelten daher die Lösungen der ganz normalen Wellengleichung:

$$\psi(x,t) = \Re\int f(p_x) e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x - Et)} dp_x.$$

Mit Hilfe der Heisenbergschen Unschärferelationen im Grundzustand

$$\partial x \partial p_x = \frac{\hbar}{2} \quad \text{und} \quad \partial t \partial E = \frac{\hbar}{2}$$

transformieren wir nunmehr diese Wellengleichung in den Impulsraum. Zunächst ist

$$\hat{E}_{kin}^2 = \frac{m^2c^2}{4} = \left(\partial p_x^2 - \frac{\partial E^2}{c^2}\right)\hbar^2\partial^2.$$

Ziehen wir das Energiedifferential vor die Klammer, erhalten wir weiter

$$\hat{E}_{kin}^2 = \left(\frac{\partial p_x^2}{\partial E^2} - \frac{1}{c^2}\right)\hbar^2 \partial E^2 \partial^2,$$

und angewandt auf die Wellenfunktion im Impulsraum $\Phi(p_x, E)$ folgt

$$\hat{E}_{kin}^2 \Phi(p_x, E) = \left(\partial p_x^2 - \frac{\partial E^2}{c^2}\right)\hbar^2\partial^2\Phi(p_x, E).$$

Diesen Ausdruck transformieren wir mit Hilfe der Heisenbergschen Unschärferelation in den Ortsraum zurück:

$$\frac{4\hat{E}_{kin}^2}{\hbar^4}\Phi(p_x, t) = \left(\frac{\partial p_x^2}{\partial E^2} - \frac{1}{c^2}\right)\frac{\partial^2\Phi(p_x, t)}{\partial t^2},$$

so daß wir nach Substitution des Operators der kinetischen Energie schreiben können:

$$\left(\frac{1}{c^2} - \frac{\partial p_x^2}{\partial E^2}\right)\frac{\partial^2\Phi(p_x, t)}{\partial t^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^4}\Phi(p_x, t) = 0.$$

In der Singularität für $m = 0$ gilt:

$$\left(\frac{1}{c^2} - \frac{\partial p_x^2}{\partial E^2}\right)\frac{\partial^2\Phi(p_x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial\Phi(p_x, t)}{\partial t} = \text{const},$$

d.h. die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, sobald sie die Singularität verläßt, ist konstant, was nicht im Widerspruch dazu steht, daß Licht sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet.