Aufgabe: Zeigen Sie, daß der wahre „Raum" achtdimensional ist.

Lösung: Für die Lichtgeschwindigkeit macht es keinen Unterschied, ob sie oder ihr Kehrwert konstant ist. Formen wir die Gleichung $E = pc$ entsprechend um, so ist

$$\frac{1}{c} = \frac{p}{E} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{c} = \frac{dp}{dE} = \text{const}.$$

Quadrieren wir den Ausdruck analog zu

$$c^2 = \frac{ds^2}{d\tau^2},$$

wobei τ die Eigenzeit ist und

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

das infinitesimale quadratische Wegdifferential, so liefert

$$\frac{1}{c^2} = \frac{dp^2}{dE^2}$$

eine äquivalente relativistische Beschreibung, in der auch das infinitesimale quadratische Impulsdifferential

$$dp^2 = \frac{dE^2}{c^2} - dp_x^2 - dp_y^2 - dp_z^2$$

einen invarianten Vierervektor darstellt. Da der Energieoperator[1] in der Zeitdarstellung auf Zeitwellenfunktionen als Differentialoperator wirkt, d.h.

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t},$$

verhält sich sein Betragsquadrat in der Singularität, d.h. für $\langle E \rangle = 0,$ wie

$$dE^2 \equiv \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \hat{E} \cdot \hat{\bar{E}} = i\hbar\frac{\partial}{\partial \tau}(-i)\hbar\frac{\partial}{\partial \tau} = \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}.$$

Mit Hilfe der Impulsoperatoren

$$\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{p}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$$

[1] Gemäß Schrödingergleichung

bzw. deren Betragsquadraten

$$dp_x^2 \equiv \left\langle p_x^2 \right\rangle - \left\langle p_x \right\rangle^2 = \hat{p}_x \cdot \hat{\bar{p}}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} i\hbar \frac{\partial}{\partial x} = \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

usw., also auch wieder für $\left\langle p_x \right\rangle = \left\langle p_y \right\rangle = \left\langle p_z \right\rangle = 0,$ können wir das relativistische Impulsdifferential entsprechend umformen:

$$dp^2 = \frac{1}{c^2}\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Unseren Ausdruck für das inverse Lichtgeschwindigkeitsquadrat bringen wir sodann auf folgende Form:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}} \left(\frac{1}{c^2}\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right).$$

In der Singularität für $t = \tau$ gilt also

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{c^2} - \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^2,$$

woraus man sofort folgern kann, daß alle partiellen Ortsableitungen der Eigenzeit identisch verschwinden:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0.$$

Das ist in der Singularität auch tatsächlich so, denn unmittelbar vor dem nächsten Urknall verschwindet das Differential der Eigenzeit

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0$$

d.h. wir messen wegen $v = c$ in jedem Bezugssystem[2] die gleiche konstante Zeit $\tau.$ Es ist egal, welche Darstellung wir wählen, denn zusammen mit

$$c^2 = c^2 - \left(\frac{\partial E}{\partial p_x} \right)^2 - \left(\frac{\partial E}{\partial p_y} \right)^2 - \left(\frac{\partial E}{\partial p_z} \right)^2$$

[2] Eigentlich gibt es in der Singularität keine anderen Bezugssysteme mehr.

haben wir in der Singularität neben 3 Orts- und 3 Impulskoordinaten noch die beiden Erhaltungsgrößen E und τ, also insgesamt 8 Dimensionen, welche sämtliche Erhaltungssätze abbilden. Die Eigenzeit ist also wie die Energie eine Erhaltungsgröße, und hinter den Heisenbergschen Unschärferelationen im niedrigsten Energiezustand

$$\Delta x \Delta p_x = \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta y \Delta p_y = \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta z \Delta p_z = \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta E \Delta \tau = \frac{\hbar}{2}$$

verbirgt sich nichts anderes als der Drehimpulserhaltungssatz. Das liefert eine vollständige mathematische Beschreibung der Natur und vereint Quantenmechanik und Relativitätstheorie. Was neu hinzugekommen ist, ist die Erkenntnis, daß die Zeit endlich ist, und daß unser subjektiver Eindruck, die Zeit fließe, der Relativität von Raum und Zeit bzw. Impuls und Energie geschuldet ist. Nicht nur der Raum ist gekrümmt, sondern auch der für uns unanschauliche Impulsraum. Diese beiden Krümmungen bewirken, daß Ort und Impuls eines quantenmechanischen Teilchens nicht gleichzeitig scharf gemessen werden können, da man die Messung entweder nur im Ortsraum oder nur im Impulsraum durchführen kann, nicht aber in beiden gleichzeitig. Das heißt natürlich nicht, daß irgend etwas überhaupt dem Zufall unterliegt, nur weil es nicht der gleichzeitigen Meßbarkeit zugänglich ist. In einem relativistischen System gibt es keine Gleichzeitigkeit, weil sich die zu messenden Größen auf unterschiedliche Darstellungen der Wellenfunktion beziehen. Den vermeintlichen Zufall trifft man im übrigen nur in quantenmechanischen Systemen an, deren Teilchenbewegung in der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit liegt. Einzig das Wasserstoffatom gestattet eine einigermaßen klassische Beschreibung. Alle anderen Atome schützen sich davor, exakt vermessen zu werden. Das ist offenbar der achtdimensionalen Struktur zweier gekoppelter vierdimensionaler Unterräume geschuldet, der relativistischen Raumzeit und der Relativität von Energie und Impuls,

qed

