Home | Startseite | Impressum | Kontakt | Gästebuch

Aufgabe: Beweisen Sie, daß die Energie des Universums in der Singularität erhalten bleibt.

Beweis: Wir berechnen zum Beweis die Energie kurz vor und kurz nach dem Urknall. Die fundamentale Aussage der Allgemeinen Relativitätstheorie ist die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Daraus folgt sofort die Konstanz von Energie und Masse[1], i.e.

$$c^2 = \frac{E}{m}.$$

Andererseits können wir aus der Invarianz des relativistischen Wegelements in sämtlichen Bezugssystemen auch auf die Invarianz des infinitesimalen Eigenzeitelements schließen, denn es gilt

$$c^2 = \frac{ds^2}{d\tau^2}.$$

Der Ausdruck

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

ist also in allen Bezugssystemen invariant und damit auch in der Singularität unmittelbar vor und nach dem Urknall. Fassen wir die Orts- und Zeitdifferenzen am Anfang und Ende der Zeit als quantenmechanische Unschärfen auf, so folgt für das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit

$$c^2 = \frac{c^2\langle t^2\rangle - \langle x^2\rangle - \langle y^2\rangle - \langle z^2\rangle}{\langle t^2\rangle},$$

da die Mittelwerte in der Singularität identisch verschwinden. Bekanntlich wirkt der Impulsoperator in der Ortsdarstellung auf Ortswellenfunktionen als Differentialoperator, d.h.

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}.$$

Entsprechend wirkt auch der Ortsoperator in der Impulsdarstellung auf Impulswellenfunktionen als Differentialoperator, i.e.

$$\hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x}.$$

Somit ist das Betragsquadrat des Ortsoperators gegeben durch

[1] Für masselose Teilchen wie Photonen gilt diese Relation natürlich nicht, sonst wäre die Lichtgeschwindigkeit unendlich.

$$\hat{x} \cdot \hat{x}^* = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x} (-i)\hbar \frac{\partial}{\partial p_x} = \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial p_x^2}$$

Entsprechendes gilt für die übrigen Ortskomponenten. In Analogie zur Orts-Impuls-Unschärfe leiten wir nun für die Energie-Zeit-Unschärfe ähnliche Größen ab. In der Schrödingergleichung finden wir bereits den Energieoperator[2] in der Zeitdarstellung, der auf Zeitwellenfunktionen als Differentialoperator wirkt, d.h.

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}.$$

Umgekehrt muß auch der Zeitoperator in der Energiedarstellung auf Energiewellenfunktionen als Differentialoperator wirken, i.e.

$$\hat{t} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial E}.$$

Folglich ist das Betragsquadrat des Zeitoperators gegeben durch

$$\hat{t} \cdot \hat{t}^* = -i\hbar \frac{\partial}{\partial E} i\hbar \frac{\partial}{\partial E} = \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial E^2}.$$

Setzen wir alle benötigten Operatoren in den obigen Ausdruck ein, erhalten wir

$$c^2 = \frac{\hbar^2}{\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial E^2}} \left(c^2 \frac{\partial^2}{\partial E^2} - \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} - \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} - \frac{\partial^2}{\partial p_z^2} \right).$$

Nach entsprechender Umformung folgt daraus

$$c^2 = c^2 - \left(\frac{\partial E}{\partial p_x} \right)^2 - \left(\frac{\partial E}{\partial p_y} \right)^2 - \left(\frac{\partial E}{\partial p_z} \right)^2.$$

Kurz nach dem Urknall war $\mathbf{v} = 0$ und daher $E = mc^2$, also müssen sämtliche partiellen Ableitungen verschwinden, d.h.

$$\frac{\partial E}{\partial p_x} = \frac{\partial E}{\partial p_y} = \frac{\partial E}{\partial p_z} = 0.$$

Die in diesem Ausdruck enthaltene Energie ist durch die relativistische Energie-Impuls-Beziehung gegeben:

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2}.$$

[2] Eigentlich Hamilton-Operator

Letztere folgt aus den Definitionen der Speziellen Relativitätstheorie für Energie und Impuls,

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}}.$$

Unmittelbar vor dem nächsten Urknall verschwindet das Differential der Eigenzeit wegen $v = c,$ d.h.

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 0.$$

Dann muß aufgrund der Definition $c = ds/d\tau$ und wegen der Invarianz des Ausdrucks

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

auch das Wegdifferential $ds = 0$ sein. Unmittelbar vor dem nächsten Urknall ist also

$$c^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \mathbf{v}^2$$

und die gesamte Materie wird zerstrahlt, d.h. die Masse verschwindet komplett in der Singularität. Da Photonen keine Masse besitzen, folgt aus der Energie-Impuls-Relation $m = 0.$ Die Lichtgeschwindigkeit bleibt indes konstant. Für sie gilt $c = E/p.$ Weil es in der Singularität aufgrund der Raumkrümmung kein Licht gibt, kann die gesamte darin enthaltene Energie nur in Masse zurückverwandelt werden und nur durch Fluktuationen der Raumzeit, wobei der Anfangsimpuls nach dem Urknall null sein muß. In der Energie-Impuls-Relation

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2\mathbf{p}^2}$$

gilt dann unmittelbar nach dem Urknall wieder $c = \sqrt{E/m}.$ Setzen wir die beiden Definitionen für die Lichtgeschwindigkeit im Falle, daß wir uns in der Singularität befinden, gleich, so erhalten wir für die Lichtgeschwindigkeit eine stetige Funktion für beide Grenzwerte,

$$c = \frac{E}{p} = \sqrt{\frac{E}{m}}.$$

Nach Kürzen der Energie auf beiden Seiten und entsprechender Umformung folgt

$$E = \frac{p^2}{m} \quad \text{und} \quad p = mc,$$

wobei die Masse dem Zustand nach dem Urknall zu entnehmen ist, der Impuls hingegen dem Zustand vor dem Urknall. Diese Relation gilt exakt nur für die Singularität. Damit gilt nach den

Aussagen der Allgemeinen Relativitätstheorie auch in der Singularität der Energieerhaltungssatz bzw. der Urknall war nur deswegen möglich, weil die Energie aus einem früheren Universum zugeführt worden ist[3],

qed

[3] Mit einem Schöpfungsprozeß hat das Ganze freilich nichts zu tun.

