Aufgabe: Beweisen Sie, daß die Heisenbergsche Unschärferelation ein relativistischer Effekt ist, und kein quantenmechanischer.

Beweis: Die Behauptung, daß Ort und Impuls eines Teilchens nicht gleichzeitig scharf gemessen werden können, weil dies nach den Aussagen der Quantenmechanik nicht möglich sei, ist falsch. Richtig ist vielmehr, daß sich die Unschärfen erst daraus ergeben, daß Raum und Zeit nach der Allgemeinen Relativitätstheorie fluktuieren müssen, um einen kausalen Anfang des Universums zu ermöglichen. Wir können die Heisenbergschen Unschärferelationen sogleich als Vierervektor schreiben:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}, \quad c\Delta t \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Dabei haben wir die Relationen

$$p = \hbar k = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = \frac{\hbar\omega}{c} \quad \text{und} \quad E = \hbar\omega = pc$$

benutzt. Aus letzterer folgt $\Delta E = \hbar\Delta\omega = c\Delta p$. Da Ort und Zeit faktisch unscharf sind, können wir für das invariante relativistische Wegelement schreiben:

$$ds^2 = c^2\Delta t^2 - \left(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right).$$

Um diese Größe abzuschätzen, lösen wir die Komponenten des Vierervektors mit Hilfe der Unschärferelationen entsprechend auf:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_x}, \quad \Delta y \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_y}, \quad \Delta z \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_z}, \quad c\Delta t \geq \frac{\hbar}{2\Delta p}.$$

Setzen wir die quadrierten Komponenten in die obige Gleichung ein, erhalten wir die Unschärferelation für das differentielle Wegelement:

$$ds^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}\left\{\frac{1}{\Delta p^2} - \left(\frac{1}{\Delta p_x^2} + \frac{1}{\Delta p_y^2} + \frac{1}{\Delta p_z^2}\right)\right\}.$$

Der kleinstmögliche Wert, den dieses Wegelement annehmen kann, liegt in der Singularität und hat den Betrag

$$ds = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{1}{\Delta p^2} - \left(\frac{1}{\Delta p_x^2} + \frac{1}{\Delta p_y^2} + \frac{1}{\Delta p_z^2}\right)}.$$

Da die Relativgeschwindigkeit der Masse[1] unmittelbar vor dem Urknall noch Null ist, folgt aus dem Differential der Eigenzeit

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

daß diese und die im feststehenden System gemessene Zeit t für $v=0$ gleich sein müssen, d.h. $d\tau = dt.$ Damit die Ortsunschärfe in der Singularität den Wert Null annehmen kann, müßte die Impuls- und damit die Energieunschärfe unendlich groß werden. Wir ersetzen nun im differentiellen Wegelement die Impulsunschärfe wieder durch die Orts- und Zeitunschärfe, da wir letztere aus den vier Komponenten der Raumzeit einfacher ableiten können:

$$\Delta x = \sqrt{\left\langle x^2\right\rangle - \left\langle x\right\rangle^2}, \quad \Delta y = \sqrt{\left\langle y^2\right\rangle - \left\langle y\right\rangle^2}, \quad \Delta z = \sqrt{\left\langle z^2\right\rangle - \left\langle z\right\rangle^2}, \quad \Delta t = \sqrt{\left\langle t^2\right\rangle - \left\langle t\right\rangle^2}.$$

In der Singularität haben alle Komponenten des Vierervektors den Mittelwert Null:

$$\left\langle x\right\rangle = \left\langle y\right\rangle = \left\langle z\right\rangle = \left\langle t\right\rangle = 0.$$

Damit vereinfachen sich die Raum-Zeit-Unschärfen zu

$$\Delta x = \sqrt{\left\langle x^2\right\rangle}, \quad \Delta y = \sqrt{\left\langle y^2\right\rangle}, \quad \Delta z = \sqrt{\left\langle z^2\right\rangle}, \quad \Delta t = \sqrt{\left\langle t^2\right\rangle}.$$

Setzen wir nun die minimalen Unschärfen in das relativistische differentielle Weg- und Zeitelement ein, d.h.

$$ds = \sqrt{c^2\left\langle t^2\right\rangle - \left\langle x^2\right\rangle - \left\langle y^2\right\rangle - \left\langle z^2\right\rangle} \quad \wedge \quad dt = \sqrt{\left\langle t^2\right\rangle},$$

so erhalten wir aus der Definition der Lichtgeschwindigkeit, $c = ds/d\tau,$ die Relation

$$c = \frac{\sqrt{c^2\left\langle t^2\right\rangle - \left\langle x^2\right\rangle - \left\langle y^2\right\rangle - \left\langle z^2\right\rangle}}{\sqrt{\left\langle t^2\right\rangle}}.$$

Anhand dieser Definition erkennen wir, daß die quadratischen Mittelwerte der Ortskoordinaten in der Singularität identisch verschwinden müssen, da die Lichtgeschwindigkeit konstant ist, während der quadratische Zeitmittelwert von Null verschieden sein muß:[2]

$$\left\langle x^2\right\rangle = \left\langle y^2\right\rangle = \left\langle z^2\right\rangle = 0 \quad \wedge \quad \left\langle t^2\right\rangle \neq 0.$$

Der Raum beginnt also „messerscharf" bei Null, während die Zeit im Mittel zwar ebenfalls bei Null beginnt, aber als solche eine Fluktuation aufweist, also auch in der Singularität unscharf ist. Die vierdimensionale Raumzeit fluktuiert daher generell. Das ist auch anschaulich

[1] Als quantenmechanisches Teilchen betrachtet
[2] Weil nicht durch Null dividiert werden kann

klar, weil in einer Singularität keine Bewegung stattfinden kann, was für die Zeit natürlich nicht gilt. Damit ist bewiesen, daß die Heisenbergsche Unschärferelation ein relativistischer Effekt ist, und kein quantenmechanischer,

qed

