Aufgabe: Berechnen Sie, um wieviel Meter der Meeresspiegel in den nächsten Jahren ansteigen wird.

Lösung: Für das Zeitverhalten des Wärmeübertrags einer in einem Wärmebad befindlichen, unendlich ausgedehnten planparallelen Eisplatte mit der Schmelz- oder Kalorimetertemperatur T_s auf der einen Seite und der Umgebungstemperatur $T > T_s$ auf der anderen gilt nach der Wärmeleitungsgleichung

$$\dot{Q} = -\frac{A\lambda}{l}(T - T_s),$$

wobei

$$\lambda = 2{,}43\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m \cdot K}}$$

die Wärmeleitfähigkeit des Eises ist, A die Oberfläche der Eisplatte und l deren Dicke. Das Vorzeichen ist negativ, weil die zum Schmelzen der Eisplatte benötigte Energie über das Wärmebad zugeführt werden muß. Die dabei freiwerdende Schmelzwärme wird dem Wärmebad sogleich zurückgegeben. Nur so ist es möglich, daß sich die Temperatur während des Schmelzens nicht ändert und die Energieänderung eine reine Entropieänderung ist. Die dem Wärmebad entzogene Wärmemenge ist andererseits auch gleich der Änderung der Wärmemenge der Eisplatte $dQ = mc_p dT$, d.h.

$$dQ = dH = hdm = \dot{Q}dt,$$

wobei

$$h = 334\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$$

die spezifische Schmelzwärme von Eis bei 0 °C ist, m die Masse der Eisplatte und

$$c_p = 2060\ \frac{\mathrm{Ws}}{\mathrm{kg \cdot K}}$$

die spezifische Wärmekapazität des Eises. Ersetzen wir die Masse durch die Dichte des Eises

$$\rho = 918\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}$$

und das Volumen der Eisplatte Al, so folgt

$$\dot{Q} = mc_p\dot{T} = \rho Alc_p\dot{T},$$

Insgesamt lautet die Wärmeleitungsgleichung dann

$$\rho lc_p\dot{T} = -\frac{\lambda}{l}(T - T_s),$$

was nach Trennung der Variablen die folgende Differentialgleichung ergibt:

$$\frac{dT}{T-T_s} = -\frac{\lambda}{\rho c_p l^2} dt.$$

Für diese Differentialgleichung mögen die Randbedingungen $T(0) = T_0$ und $T_s = 273{,}15\ \text{K}$ gelten, womit wir das folgende bestimmte Integral zu lösen haben:

$$\int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T-T_s} = -\frac{\lambda}{\rho c_p l^2} \int_0^t dt.$$

Nach Substitution der Variablen erhalten wir den Ausdruck

$$\int_{T_0-T_s}^{T-T_s} \frac{dx}{x} = [\ln x]_{T_0-T_s}^{T-T_s} = \ln \frac{T-T_s}{T_0-T_s} = -\frac{\lambda}{\rho c_p l^2} t,$$

den wir nach der Temperatur

$$T(t) = T_s + (T_0 - T_s) e^{-\frac{\lambda}{c_p \rho l^2} t}$$

auflösen können. Um die Eisplatte gänzlich zu schmelzen, benötigen wir eine spezifische Schmelzenthalpie h entsprechend unserer Anfangsbedingung

$$T(0) = T_s + \frac{h}{c_p},$$

womit die zeitliche Abhängigkeit folgende Gestalt annimmt:

$$T(t) = T_s + \frac{h}{c_p} e^{-\frac{\lambda}{c_p \rho l^2} t}.$$

Die zeitliche Endbedingung nach „unendlicher" Zeit, wenn alles Eis abgeschmolzen ist, lautet

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = T_s + \frac{h}{c_p} \lim_{t\to\infty} e^{-\frac{\lambda}{c_p \rho l^2} t} = T_s.$$

Tatsächlich dauert das Schmelzen aber nicht unendlich lange, sondern ist bei der Temperatur $T > T_s$ abgeschlossen. Die zum vollständigen Abschmelzen benötigte Enthalpie in Temperatureinheiten[1] beträgt

$$T_0 - T_s = \frac{h}{c_p} = \frac{334}{2{,}060}\ \text{K} = 162\ \text{K}.$$

Da die mittlere Dicke des Eispanzers bei 2160 m liegt, die Wärme aber sowohl aus der Luft als auch vom Boden her vordringt, können wir mit der Hälfte rechnen, also mit $l = 1080\ \text{m}$, indem

[1] Die Masse kürzt sich auf beiden Seiten heraus.

wir sozusagen eine unsichtbare Trennfläche durch die Eisplatte legen und uns dieser quasi von zwei Seiten aus nähern. Damit ergibt sich die Schmelzrate γ aus dem Kehrwert

$$\gamma^{-1} = \frac{\rho c_p}{\lambda} l^2 = 918\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 2060\ \frac{\mathrm{Ws}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}} \cdot \frac{1{,}17 \cdot 10^6\ \mathrm{m}^2}{2{,}43}\ \frac{\mathrm{m} \cdot \mathrm{K}}{\mathrm{W}} = 9{,}03 \cdot 10^{11}\ \mathrm{s} = 28600\ \mathrm{a}.$$

Die Schmelzdauer bestimmen wir durch Auflösen der Gleichung nach der Zeit t, i.e.

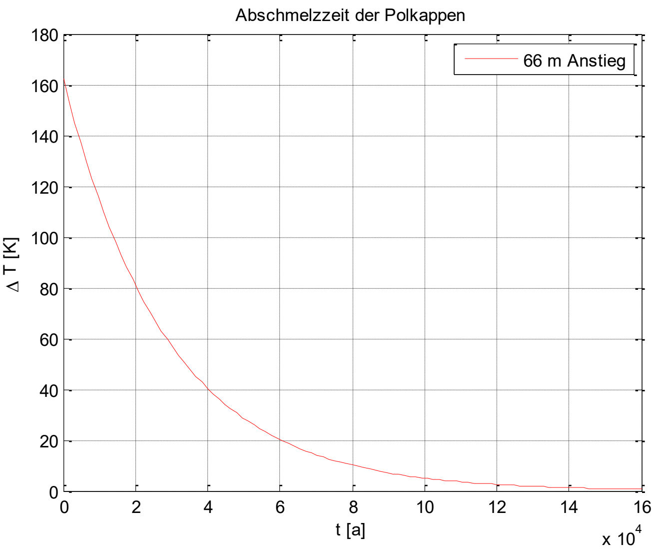
$$t = \frac{\rho c_p l^2}{\lambda} \ln \frac{T_0 - T_s}{T - T_s}.$$

Bleibt es bei nur einem Grad Temperaturerhöhung, wäre die Antarktis erst in

$$t = 28600\ \mathrm{a} \ln \frac{162\ \mathrm{K}}{1\ \mathrm{K}} = 145505\ \mathrm{a}$$

vollständig abgeschmolzen. Das entspricht einem Anstieg des Meeresspiegels um ca. 66 m [1]. Wenn auch nur die Hälfte davon abgeschmolzen ist, was einem Anstieg von 33 m entspräche, können wir mit $l = 540\ \mathrm{m}$ rechnen, was bei angenommenen 4,5 K bis zum Ende des Jahrhunderts erst in 25622 Jahren eintreten würde. Setzen wir diese Teilung fort, so entspricht einem Meeresspiegelanstieg um 16,5 m eine Zeit von 6405 Jahren. Ein Anstieg um 8,25 m wäre demnach in 1601 Jahren zu erwarten und ein Anstieg um 4,12 m in 400 Jahren. Bei einem 32tel des abgeschmolzenen Eispanzers, was einem Meeresspiegelanstieg um 2,06 m in 100 Jahren entspricht, vorausgesetzt, daß es bei den 4,5 K bleibt, könnte der Meeresspiegel bis zum Ende des Jahrhunderts tatsächlich um 2 m steigen und grob gerechnet um mindestens $1\ \mathrm{m}$ bis zur Mitte des Jahrhunderts.

Abb. 1 zeigt den zeitlichen Verlauf der antarktischen Polarschmelze[2] für das vollständige Abschmelzen des Eispanzers. Je nachdem, welches ΔT man zugrunde legt, schneidet eine parallele Gerade zur Abszisse die Kurve genau zu der Zeit t, zu der die Dicke l der Eisschicht vollständig abgetragen ist.



[2] Das Schmelzen des Nordpolareises trägt zum Anstieg des Meeresspiegels nichts bei.

Abbildung 1. Anstieg des Meeresspiegels bei Abschmelzen der kompletten Eismasse

In Abb. 2 ist noch einmal zusammenfassend dargestellt, wie der Schmelzkurvenverlauf nach Abschmelzen der hälftigen, der viertelten, der achtelten, der 16.ten und der 32.ten Eismächtigkeit aussieht.

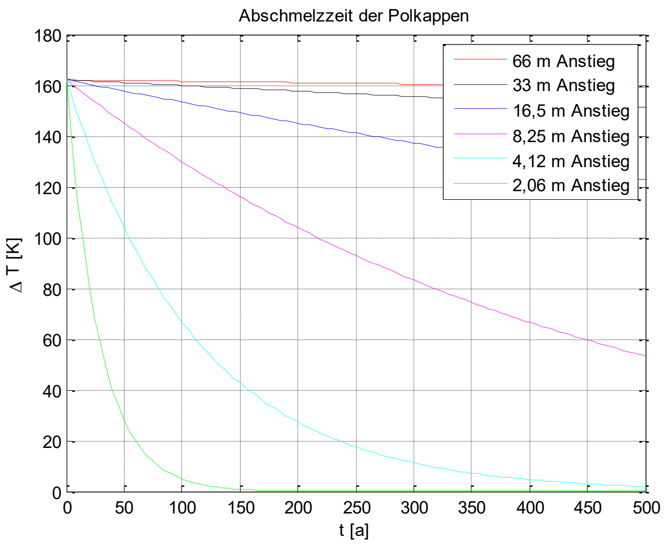


Abbildung 2. Anstieg des Meeresspiegels bei Abschmelzen der gesamten Eismasse (rot), der halben Eismasse (schwarz), eines Viertels der Eismasse (blau), eines Achtels der Eismasse (magenta), eines 16tels der Eismasse (cyan) und eines 32tels der Eismasse (grün)

Es sei betont, daß dies nur eine überschlägige Rechnung ist, die unter der Annahme von gewissen Mittelwerten getroffen wurde. Darin nicht enthalten sind der Tag-Nacht-Wechsel mit den jeweiligen Temperaturänderungen, die jahreszeitlichen Temperaturschwankungen und die Effekte der Sonneneinstrahlung. Randeffekte wurden wegen der Größe der Eisausdehnung nicht betrachtet. Auch nicht berücksichtigt wurde die globale Verteilung der Eismassen[3], die nicht alle gleichzeitig abschmelzen werden, weil sie einer unterschiedliche Umgebungstemperatur ausgesetzt sind. Insofern ist durch die Beiträge südlicherer Gletschermassen anfangs ein noch stärkerer Anstieg zu erwarten, als wenn man annimmt, daß alles Eis in der Antarktis konzentriert ist.

Literatur:

[1] http://www.abendblatt.de/ratgeber/wissen/article119452200/Was-bleibt-wenn-die-Polkappen-schmelzen.html

[3] z.B. liegen Grönland und Island geographisch südlicher als die Antarktis

