Aufgabe: Erklären Sie den radioaktiven Zerfall quantenmechanisch.

Lösung: Nehmen wir an, der radioaktive Zerfall unterliege einer Wahrscheinlichkeitsdichte der Form[1]

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta t}e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-T_{1/2})^2}{\Delta t^2}},$$

die auf Eins normiert ist, d.h.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-T_{1/2})^2}{\Delta t^2}}dt=1.$$

Dabei ist $T_{1/2}$ Halbwertszeit des radioaktiven Zerfalls und Δt die Unschärfe bzw. Streuung der Verteilung. Dann ist der zeitliche Erwartungswert gegeben durch

$$\langle t\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta t}\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{1}{2}\frac{(t-T_{1/2})^2}{\Delta t^2}}dt=T_{1/2}.$$

Mit der Relation

$$t^2=(t-T_{1/2})^2+2T_{1/2}t-T_{1/2}^2$$

und wegen der Zeitvarianz

$$\left\langle (t-\langle t\rangle)^2\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta t}\int_{-\infty}^{+\infty}(t-T_{1/2})^2 e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-T_{1/2})^2}{\Delta t^2}}dt=\Delta t^2$$

folgt für den quadratischen Zeitmittelwert

$$\begin{aligned}\langle t^2\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta t}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-T_{1/2})^2}{\Delta t^2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta t}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(t-T_{1/2})^2+2T_{1/2}t-T_{1/2}^2\right]e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-T_{1/2})^2}{\Delta t^2}}dt\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta t}\int_{-\infty}^{+\infty}(t-T_{1/2})^2e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-T_{1/2})^2}{\Delta t^2}}dt+2T_{1/2}T_{1/2}-T_{1/2}^2=T_{1/2}^2+\Delta t^2\end{aligned}$$

und damit die Identität

$$\left\langle (t-\langle t\rangle)^2\right\rangle=\left\langle t^2-2t\langle t\rangle+\langle t\rangle^2\right\rangle=\langle t^2\rangle-\langle t\rangle^2$$

bzw. die Unschärfe

[1] Genaugenommen gehorcht der radioaktive Zerfall einer Poisson-Verteilung, wobei die Zeitunschärfe der Wurzel aus der Halbwertszeit entspricht.

Copyright © 2015, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

$$\Delta t = \sqrt{\left\langle t^2 \right\rangle - \left\langle t \right\rangle^2}.$$

Nun gilt die Äquivalenzbeziehung

$$\Delta t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \equiv \sqrt{\left\langle t^2 \right\rangle} = \left\langle t \right\rangle = T_{1/2},$$

d.h. die Zeit entspricht nur dann ihrem Erwartungswert, wenn ihre Unschärfe gleich Null ist. In quantenmechanischen Systemen ist die Zeit hingegen unscharf, denn es gilt die Heisenbergsche Energie-Zeit-Unschärferelation

$$\Delta t \geq \frac{\hbar}{2\Delta E},$$

wobei ΔE die Energieunschärfe des quantenmechanischen Systems ist und $\hbar$ das Plancksche Wirkungsquantum. Formen wir nun die Zeit, d.h. die Wurzel aus dem quadratischen Zeitmittelwert, mit Hilfe der binomischen Näherung entsprechend um, indem wir noch die Zeitunschärfe sehr viel kleiner annehmen als die Halbwertszeit, erhalten wir

$$t \equiv \sqrt{\left\langle t^2 \right\rangle} = T_{1/2}\sqrt{1 + \frac{\Delta t^2}{T_{1/2}^2}} \approx T_{1/2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta t^2}{T_{1/2}^2}\right).$$

Setzen wir aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation

$$\Delta t^2 \geq \frac{\hbar^2}{4\Delta E^2}$$

in die obige Gleichung ein, erhalten wir die Abschätzung

$$t \geq T_{1/2} + \frac{\hbar^2}{8T_{1/2}\Delta E^2}.$$

Daraus ersehen wir, daß der zweite Term auf der rechten Seite gegenüber der Halbwertszeit zu vernachlässigen ist, wenn die Energieunschärfe sehr groß ist, d.h. wenn

$$T_{1/2} >> \frac{\hbar}{\sqrt{8}\Delta E}.$$

Wenn umgekehrt ΔE sehr klein wird, steigt der zeitliche Erwartungswert über alle Maßen, weil gleichzeitig die Zeitunschärfe dramatisch zunimmt.

Freie Teilchen, die keine Energieunschärfe haben, zerfallen also nicht, weil ihr zeitlicher Erwartungswert unendlich ist, sie sind stabil. Nuklide mit geringer energetischer Streuung können folglich extrem hohe Lebensdauern erreichen, während Nuklide mit hoher energetischer Streuung bzw. Varianz umgekehrt schon nach sehr kurzer Zeit zerfallen können. Letztere erfüllen auch die obige Ungleichung desto leichter. In der Tat sind die Halbwertszeiten um so größer, je geringer die spezifische Aktivität eines Isotops ist. Leichte und symmetrische Nuklide wie

Copyright © 2015, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

das Proton zerfallen gar nicht[2]. Die Trägheit großer Massen verursacht in der Regel kleinere Streuungen und daher eine um so höhere Lebensdauer. Grundsätzlich ist also die Zeit in einem quantenmechanischen System genauso unscharf wie der Ort oder Impuls, zumal nach der Allgemeinen Relativitätstheorie Raum und Zeit einen Vierervektor bilden, dessen Komponenten alle die gleichen Eigenschaften haben müssen.

Da die Zeit in einem quantenmechanischen System aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation quantisiert ist und um den Erwartungswert streut, liegen von N Teilchen eines Ensembles nach einem radioaktiven Zerfall genau die Hälfte über dem zeitlichen Erwartungswert der Gaußverteilung, die andere Hälfte darunter und kann daher nicht zerfallen, weil die Zeit nur diskrete Schritte erlaubt. Nach einer weiteren Halbwertszeit sind nur noch ein Viertel aller Isotope vorhanden, nach drei Halbwertszeiten ein Achtel usw. Wäre dem nicht so, würden alle radioaktiven Isotope des Universums schlagartig zerfallen und die Materie würde dahinschmelzen wie Butter.

[2] Jedenfalls wurde noch kein Zerfall beobachtet.

Copyright © 2015, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.