Aufgabe: Erklären Sie mit Hilfe der klassischen Elektrodynamik, warum ein auf einer elliptischen Bahn umlaufendes Elektron im Atom nicht strahlt. Was schließen Sie daraus für die Quantenmechanik?

Lösung: Nach der klassischen Elektrodynamik stellt ein kreisendes Elektron im Abstand $\vec{r}$ vom Bewegungsmittelpunkt einen Kreisstrom I dar, der mit einem magnetischen Moment in Richtung der Flächennormalen senkrecht zur Bahn verknüpft ist. Aus der Definition der Stromdichte $\vec{j} = \rho\vec{v}$ und des Volumenelements

$$\vec{j}d^3r == \rho\vec{v}d^3r = \vec{v}dq = Id\vec{r}$$

folgt für das magnetische Moment des Elektrons

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2}\iiint \vec{r} \times \vec{j}d^3r = \frac{\rho}{2}\iiint \vec{r} \times \vec{v}d^3r = \frac{I}{2}\int \vec{r} \times d\vec{r} = I\vec{A} = IA\vec{e}_z,$$

wobei A die Fläche der „Leiterschleife“ ist, die der Ringstrom bildet, ρ die Ladungsdichte und $\vec{v}$ die Bahngeschwindigkeit der umlaufenden Ladung. Im Falle einer Ellipse mit den Halbachsen a und b ergibt sich mit Hilfe der Substitutionen $I = -q/T$ und $A = \pi ab$ für das magnetische Moment

$$\vec{\mu} = -\frac{q}{T}\pi ab\vec{e}_z.$$

Dabei ist T die Umlaufdauer und q die Ladung des rotierenden Teilchens. Da nach dem Flächensatz mit einem magnetischen Moment ein Drehimpuls verbunden ist, folgt aufgrund der Beziehung $\pi ab = L_z T/(2m)$ für das magnetische Moment die Relation

$$\vec{\mu} = -\frac{q}{2m}L_z\vec{e}_z.$$

Dabei ist L_z die Komponente des Drehimpulses in z-Richtung und m die Masse des umlaufenden Teilchens. Nach den Maxwell-Gleichungen, genauer gesagt dem Biot-Savartschen Gesetz, ist mit dem magnetischen Moment eines atomaren Kreisstroms eine magnetische Flußdichte

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}d\vec{r} \times \frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}rd\varphi\vec{e}_\varphi \times \frac{r\vec{e}_r}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\varphi}{r}\vec{e}_z$$

am Ort des Kerns verbunden, die im Zentrum der Leiterschleife, d.h. im Abstand $r = p/(1 - e\cos\varphi)$ vom Elektron, den Wert

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi p}(1 - e\cos\varphi)d\varphi\vec{e}_z$$

Copyright © 2015, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

annimmt. Dabei ist φ der Azimutwinkel, p der Bahnparameter und e die Exzentrizität der Ellipse, wobei wir die Bahnbewegung in die x-y-Ebene gelegt haben. Das Integral über den Winkel φ ergibt für das B-Feld den Ausdruck

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi p}\frac{q}{T}\int_0^{2\pi}\left(1 - e\cos\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\vec{e}_z = \frac{\mu_0}{2p}\frac{\vec{\mu}}{\pi ab}$$

und, wenn wir das magnetische Moment durch den Drehimpuls ersetzen, die Relation

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4p}\frac{q}{\pi ab}\frac{L_z}{m}\vec{e}_z.$$

Substituieren wir noch die Ellipsenfläche durch

$$\pi ab = \frac{\pi p^2}{\sqrt{1-e^2}^3},$$

so folgt für die z-Komponente des B-Feldes

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sqrt{1-e^2}^3}{p^3}\frac{L_z T}{m}.$$

Im Falle einer Kreisbahn erhalten wir nach Eliminierung des Drehimpulses mit Hilfe des Flächensatzes das bekannte Ergebnis

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2p}.$$

Das gleiche Magnetfeld erzeugt im Ruhesystem des Elektrons der kreisende Kern, lediglich mit vertauschtem Vorzeichen. Die Summe beider Felder im System des Ladungsschwerpunkts ist daher räumlich und zeitlich konstant, und die beiden Felder addieren sich zu null. Daran ändert sich auch nichts, wenn die Bahnkurve eine Ellipse beschreibt. Bei der Ablenkung eines Teilchens der Ladung q im räumlich und zeitlich konstanten Magnetfeld wird im Gegensatz zur Ablenkung im elektrischen Feld keine Arbeit verrichtet, kinetische Energie und Bahngeschwindigkeit bleiben unverändert. Die Bremsstrahlung des Elektrons wird, wie wir später sehen, werden, durch die des Kerns aufgewogen. Das muß auch so sein, sonst wären die Maxwellgleichungen verletzt.

Nachdem der quantenmechanische Drehimpuls gegeben ist durch

$$L_z = m_l\hbar, \quad \text{mit} \quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

(l ist die Bahndrehimpulsquantenzahl und $\hbar$ das Plancksche Wirkungsquantum), hat das B-Feld am Ort des Kerns für ein auf der ersten Bohrschen Bahn $(l = 1)$ umlaufendes Elektron den Wert

Copyright © 2015, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

$$B_z = -\frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}^3} \frac{\hbar}{ma^3},$$

wobei wir noch von der für die Ellipse geltenden Relation $p = a(1-e^2)$ Gebrauch gemacht haben.

Für das vom Azimutwinkel abhängige E-Feld des Elektrons am Ort des Kerns gilt

$$\vec{E}_r = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 p^2} (1-e\cos\varphi)^2 \vec{e}_r.$$

Der Energiefluß weist demnach in Richtung des Poynting-Vektors, d.h. in Richtung abnehmender Azimutwinkel. Daher gilt im System des Elektrons am Ort des Protons für das Vakuum

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right) = \frac{1}{\mu_0} E_r B_z \left(\vec{e}_r \times \vec{e}_z\right) = -\frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0} \frac{\hbar}{mp^5} \sqrt{1-e^2}^3 (1-e\cos\varphi)^2 \vec{e}_\varphi.$$

Im System des Ladungsschwerpunkts sieht allerdings der Kern die vom Elektron erzeugte ringförmige Welle gar nicht, ebensowenig wie das Elektron die vom Kern erzeugte. Ersetzen wir zur Berechnung des periodischen Mittelwerts den Einheitsvektor in Polarkoordinaten durch kartesische,

$$\vec{S} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0} \frac{\hbar}{mp^5} \sqrt{1-e^2}^3 (1-e\cos\varphi)^2 \left(\sin\varphi \vec{e}_x - \cos\varphi \vec{e}_y\right),$$

wobei die Komponenten gegeben sind durch

$$S_x = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0} \frac{\hbar}{mp^5} \sqrt{1-e^2}^3 (1-e\cos\varphi)^2 \sin\varphi,$$
$$S_y = -\frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0} \frac{\hbar}{mp^5} \sqrt{1-e^2}^3 (1-e\cos\varphi)^2 \cos\varphi,$$

so folgt für die zeitliche Änderung des Poynting-Vektors

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{d\vec{S}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{dS_x}{d\varphi}\vec{e}_x + \frac{dS_y}{d\varphi}\vec{e}_y\right)\dot{\varphi},$$

wobei die Ableitungen nach dem Winkel gegeben sind durch

$$\frac{dS_x}{d\varphi} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0} \frac{\hbar}{mp^5} \sqrt{1-e^2}^3 \cos\varphi (1-e\cos\varphi)(1-e\cos\varphi + 2e\sin\varphi\tan\varphi),$$
$$\frac{dS_y}{d\varphi} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0} \frac{\hbar}{mp^5} \sqrt{1-e^2}^3 \sin\varphi (1-e\cos\varphi)(1-3e\cos\varphi).$$

Copyright © 2015, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

Indem wir über einen vollen Umlauf integrieren, erhalten wir den über eine Periode gemittelten Energiefluß aus dem Integral

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dS_x}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dS_y}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0}\frac{\hbar}{mp^5}\sqrt{1-e^2}^{\,3}\int_0^{2\pi}(1-e\cos\varphi)$$
$$\times\sqrt{\cos^2\varphi(1-e\cos\varphi+2e\sin\varphi\tan\varphi)^2+\sin^2\varphi(1-3e\cos\varphi)^2}\,d\varphi,$$

das analytisch nicht gelöst werden kann. Für eine Kreisbahn $(e=0)$ ist das Integral jedoch lösbar und es gilt

$$S = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0}\frac{\hbar}{ma^5}\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\,d\varphi = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{\hbar}{ma^5}.$$

Die Kraftverhältnisse sind in Abb. 1 dargestellt.

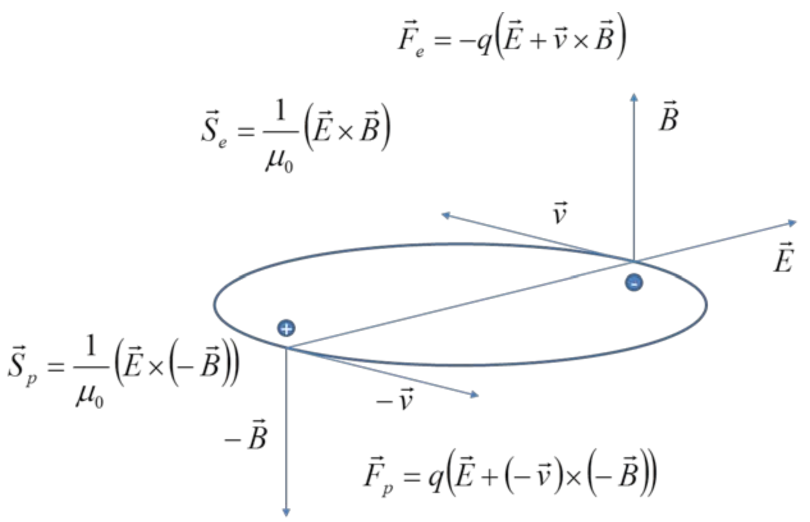

Abbildung 1. Aus Symmetriegründen ist die Summe der Kräfte im Ladungsschwerpunkt des Atoms gleich null

Die soeben durchgeführte Berechnung gilt für ein kinematisches System, bei dem der Mittelpunkt der Bahnbewegung im Kern liegt. Da sich der Massenschwerpunkt jedoch nicht exakt im Kernmittelpunkt befindet, sondern nur in seiner Nähe, haben wir es hier mit einem Zweikörperproblem zu tun. Der Ladungsschwerpunkt wiederum, der für die Dipolberechnung maßgeblich ist, liegt exakt zwischen den beiden Ladungen. Im Ladungsschwerpunkt ist sowohl die Summe der elektrischen als auch der magnetischen Feldstärken gleich null. Beide Felder sind zudem in diesem System rotationssymmetrisch, d.h. das Atom ist keinerlei Kräften ausgesetzt und kann daher auch keine Strahlung abgeben, auch nicht durch Bremsstrahlung[1]. Das wird auch durch die Tatsache deutlich, daß Atome elektrisch neutral sind. Wenn sie strahlen würden, wären sie nicht stabil, der Drehimpulserhaltungssatz wäre verletzt und das Elektron würde in den Kern stürzen. Nach den Annahmen der Quantenmechanik kreisen

[1] Nach der Kramerschen Regel ist die Intensitätsverteilung proportional zum Vorzeichen der jeweils rotierenden Ladung, beide Verteilungen heben sich also gegenseitig auf.

Copyright © 2015, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

die Elektronen nicht um einen Kern, sondern halten sich mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit in einer Ladungsverteilung mit dem Kern als Mittelpunkt auf, haben aber dennoch einen festen Drehimpuls. Ein Elektron, das den Kern[2] nicht auf einer festen Bahn umläuft, würde nach der klassischen Mechanik seinen Drehimpuls aufgrund eines ständig sich ändernden Drehmoments fortlaufend ändern. Nach den Gesetzen der Elektrodynamik müßte ein derart sich bewegendes Teilchen aufgrund der dabei induzierten elektrischen und magnetischen Flußänderungen kontinuierlich Energie verlieren. Dem widerspricht, daß sowohl der Drehimpuls als auch die Energie im Atom erhalten bleiben und das Atom nach außen keinen Fluß abgibt. Dieser Widerspruch ist nur zu lösen, wenn man annimmt, daß sich die Elektronenhülle des Atoms streng deterministisch verhält, und nicht statistisch, wie es die Quantenmechanik fordert. Dabei ist unerheblich, ob man ein quantenmechanisches Teilchen als Korpuskel betrachtet oder als Welle, wie man am Beispiel des als geschlossene Ringwelle umlaufenden Poynting-Vektors, der sich zugleich wie ein kreisender Massenpunkt verhält, sehr schön sieht. Die energetischen Verhältnisse bleiben hiervon unberührt. Eine Abstrahlung kann man also nicht einfach dadurch herbeireden, daß man den Kern festhält und postuliert, er könne deshalb nicht abgebremst werden.

[2] Im einfachsten Fall wie beim Wasserstoffatom ein Proton

Copyright © 2015, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.