Aufgabe: Berechnen Sie die Temperatur des Universums zum Zeitpunkt des Urknalls. Behandeln Sie die Materie im Weltall als einatomiges ideales Gas.

Lösung: Wir betrachten zur Lösung dieser Aufgabe das Weltall nicht in seiner zeitlichen Entwicklung, sondern nur seinen Anfangs- und Endzustand und nehmen dazu ferner an, daß sich die dynamischen Vorgänge periodisch wiederholen. Nach unserer Theorie sollen weder der Energie- noch der Drehimpulserhaltungssatz zu irgendeiner Zeit verletzt sein.

Nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik erhöht sich die innere Energie eines Gases nur, wenn Arbeit am System verrichtet wird oder dem System Wärme zugeführt wird,

$$dU = dW + dQ = dW + TdS.$$

Wenn einem System von außen keine Wärme zugeführt wird, verläuft die Änderung adiabatisch, d.h. dann gilt $dQ = dS = 0$. Wenn der innere Gravitationsdruck in jedem Moment mit einer Volumenänderung des Systems einhergeht, beträgt die differentiell verrichtete Arbeit $dW = -pdV$. Daraus folgt für die innere Energie

$$dU = dW = -pdV.$$

Aufgrund der adiabatischen Zustandsänderung gilt für die Volumenabhängigkeit des Drucks

$$pV^{5/3} = p_0 V_0^{5/3},$$

wobei p_0 und V_0 die Zustandsgrößen zum Zeitpunkt des Urknalls sind. Damit ergibt sich folgende Expansionsarbeit:

$$\Delta W = -p_0 V_0^{5/3} \int_{V_0}^{V} \frac{dV}{V^{5/3}} = \frac{3}{2} p_0 V_0^{5/3} \left(\frac{1}{V^{2/3}} - \frac{1}{V_0^{2/3}} \right) = \frac{3}{2} \left(pV - p_0 V_0 \right).$$

Nach der kinetischen Gastheorie beträgt die innere Energie eines einatomigen idealen Gases

$$U = \frac{3}{2} NkT$$

und die Änderung der inneren Energie

$$\Delta U = \frac{3}{2} Nk\Delta T.$$

Formen wir die vom System verrichtete Arbeit entsprechend um und betrachten das Volumen des Universums als kugelförmig, dann folgt mit $V = (4\pi/3)R^3$ der Ausdruck

$$\Delta W = \frac{3}{2} p_0 V_0 \left(\frac{V_0^{2/3}}{V^{2/3}} - 1 \right) = \frac{3}{2} NkT_0 \left(\frac{R_0^2}{R^2} - 1 \right),$$

wobei das Universum zu jedem Zeitpunkt der idealen Gasgleichung $pV = NkT$ genügen möge. Setzen wir $\Delta U = \Delta W$, dann lautet der erste Hauptsatz für das Universum

$$\frac{3}{2}Nk\Delta T = \frac{3}{2}NkT_0\left(\frac{R_0^2}{R^2} - 1\right),$$

welchen wir nach Kürzen entsprechender Größen auf folgenden einfachen Ausdruck bringen können:

$$T - T_0 = T_0\left(\frac{R_0^2}{R^2} - 1\right).$$

Die Temperaturen des Universums verhalten sich also umgekehrt wie die Oberflächen vor und nach seiner Ausdehnung. Aus dem Radius einer nichtrotierenden Kugel,

$$R = \frac{2GM}{c^2},$$

und mit Hilfe der relativistischen Massenformel erhalten wir die grundlegende thermodynamische Zustandsgleichung des Universums:

$$T = \frac{M_0^2}{M^2}T_0 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)T_0.$$

Insbesondere ist $T = T_0$ für $v = 0$ und $T = 0$ für $v = c,$ auch wenn der absolute Temperaturnullpunkt nicht erreicht werden kann. Diese Tatsache spricht im übrigen dafür, daß das Weltall endlich ist.

Gleichzeitig ist ΔU gleich der Differenz der Bindungsenergien des Weltalls in seinem Anfangs- und Endzustand. Für ein Kugelvolumen bedeutet das

$$\frac{3}{2}NkT - \frac{3}{2}NkT_0 = \frac{3}{5}\frac{GM_0^2}{R}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{3}{5}\frac{GM_0^2}{R_0}$$

Für $v = c$ können wir daraus die Temperatur des Alls zum Zeitpunkt des Urknalls berechnen:

$$T_0 = \frac{2}{5}\frac{GM_0^2}{NkR_0}$$

Setzen wir den Schwarzschildradius eines nichtrotierenden Schwarzen Lochs ein,

$$R_0 = \frac{2GM_0}{c^2},$$

so folgt die Anfangstemperatur des Universums aus der Gleichung

$$T_0 = \frac{1}{5}\frac{M_0}{Nk}c^2.$$

Betrachten wir das All nur aus Wasserstoffatomen bestehend, so beträgt

$$T_0 = 0{,}2\frac{1{,}008 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/K}}\left(3 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}\right)^2 = \frac{1{,}8 \cdot 1{,}008 \cdot 1{,}66}{1{,}38}10^{12}\ \mathrm{K} = 2{,}18 \cdot 10^{12}\ \mathrm{K}.$$

