**Aufgabe:** Begründen Sie, warum das Weltall am Ende in eine Singularität münden muß.

**Lösung:** Die potentielle Energie eines ins Unendliche versetzten Massenpunkts als Folge des Urknalls beträgt anders als bei einem gebundenen System

$$E_{pot} = \int_r^\infty \frac{GmM}{r^2}\,dr = GmM\left[-\frac{1}{r}\right]_r^\infty = \frac{GmM}{r},$$

da vom Gravitationsdruck Arbeit gegen die anziehende Gravitationskraft verrichtet werden muß. Daher lautet der Energieerhaltungssatz für einen Massenpunkt $m$, der vom Radius $r$ ins Unendliche gebracht wird,

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{GmM}{r},$$

wobei $M$ die Masse des Universums ist, $\dot{r}$ die Radialgeschwindigkeit des Massenpunkts und $\dot{\varphi}$ seine Winkelgeschwindigkeit. Die Größe $G$ ist die Gravitationskonstante. Nach Einsetzen des Drehimpulserhaltungssatzes $L = mr^2\dot{\varphi}$ können wir schreiben:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GmM}{r}.$$

Nach den Aussagen der Allgemeinen Relativitätstheorie hätte ein im Unendlichen befindliches Objekt die Gesamtenergie $E = mc^2$, woraus sich eine Radialgeschwindigkeit $\dot{r} = \sqrt{2}c$, ergäbe, was aber nicht sein kann, weil sich nach der Speziellen Relativitätstheorie nichts schneller bewegen kann als das Licht. Begrenzen wir daher die Radialgeschwindigkeit auf $\dot{r}_{\max} = c$, so folgt der maximale Radius $R$ des Universums am Ende seiner Ausdehnung aus der Gleichung

$$c^2 = \frac{L^2}{m^2R^2} + \frac{2GM}{R}.$$

Multiplizieren wir diesen Ausdruck mit $R^2$ und dividieren ihn gleichzeitig durch $c^2$, erhalten wir die quadratische Gleichung

$$R^2 - \frac{2GM}{c^2}R - \frac{L^2}{m^2c^2} = 0.$$

Mit der einzigen physikalisch sinnvollen Lösung

$$R = \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2c^2}}$$

hätte ein Weltall ohne Drehimpuls den Radius

 

$$R = \frac{2GM}{c^2}.$$

Setzen wir den Drehimpulserhaltungssatz $L = mRv$ in die obige Gleichung ein, so ergibt sich für ein Weltall, welches einen Drehimpuls besitzt, ein Radius von

$$R = \frac{2GM}{c^2} \Big/ \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right),$$

was im Grenzfall $v \to c$ eine unendliche Ausdehnung hätte, wenn die Ruhemasse dabei nicht selbst gegen Null gehen würde:

$$M_0 = \frac{1}{2}\frac{R}{G}c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}^3 .$$

Natürlich kann sich die Ruhemasse nicht einfach in Nichts auflösen, sondern sich höchstens in dunkle Materie bzw. Energie verwandeln. Dieser Prozeß scheint um so effizienter zu verlaufen, je stärker sich die Geschwindigkeit der sichtbaren Materie der Lichtgeschwindigkeit nähert. Das kann energetisch nur erklärt werden, wenn die Erhaltungsgröße nicht die Energie, sondern die Entropie ist, und zwar unter Einschluß von sichtbarer und dunkler Materie. Im täglichen Leben merken wir davon nichts, weil die Geschwindigkeit der bewegten Massen, mit denen wir es zu tun haben, zu weit von der Lichtgeschwindigkeit entfernt sind. Auf kosmischer Ebene hingegen können wir den Massenverlust jedoch sehr wohl feststellen, weil Schwarze Löcher an Masse zunehmen, und diese kann nur der sichtbaren Masse entzogen worden sein.

Im Falle eines starren Körpers müssen wir die Energien entsprechend anpassen. Die kinetische Energie einer rotierenden Kugel ohne Translationsenergie[1] beträgt

$$E_{rot} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2 = \frac{L^2}{2\Theta},$$

wobei $L = \Theta\omega$ der Drehimpuls ist. Wenn wir im folgenden ein kugelförmiges All mit homogener Dichteverteilung annehmen, dürfen wir das Trägheitsmoment für eine Vollkugel verwenden, d.h.

$$\Theta = \frac{2}{5}Mr^2,$$

was zu einer Rotationsenergie von

$$E_{rot} = \frac{1}{5}Mr^2\omega^2 = \frac{5}{4}\frac{L^2}{Mr^2}$$

[1] In diesem Sinne besitzt der Schwerpunkt des Weltalls keine Geschwindigkeit.

 

führt. Die potentielle Energie einer expandierenden Vollkugel ist gleich ihrer Bindungsenergie und beträgt

$$E_{pot} = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{r}.$$

Sie muß, damit es sich ausdehnen kann, vom Gravitationsdruck gegen die das Weltall zusammenhaltende Gravitationskraft aufgebracht werden und zählt daher wie oben positiv. Damit erhalten wir folgende Gesamtenergie:

$$E = E_{rot} + E_{pot} = \frac{5}{4}\frac{L^2}{Mr^2} + \frac{3}{5}\frac{GM^2}{r} = Mc^2,$$

wobei wir noch von der Einsteinschen Energie-Masse-Äquivalenz Gebrauch gemacht haben. Der Rückgang der Energie im Unendlichen kann erklärt werden, indem man annimmt, daß sichtbare Materie und damit Energie in einem supermassereichen Schwarzen Loch verschwindet. Da die kinetische Energie im Grenzfall einer Ausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit niemals größer sein kann als die hälftige Gesamtenergie, folgt durch Gleichsetzen von kinetischer und potentieller Energie,

$$\frac{1}{2}Mc^2 = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R},$$

der Radius des Alls unter der Annahme eines starren Körpers zu

$$R = \frac{6}{5}\frac{GM}{c^2}.$$

Dieser Wert ist nur knapp größer als die Hälfte dessen, was wir erhalten würden, wenn wir von einem Massenpunkt ausgehen. Ferner gilt für ein stationäres, nicht weiter expandierendes All $(\dot{r} = 0)$ im Umkehrpunkt

$$v^2 = R^2\omega^2 = \frac{25L^2}{4M^2R^2},$$

was einer kinetischen Energie von

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{25L^2}{8MR^2}$$

Entspricht. Damit hat der Anteil der Rotationsenergie an der Gesamtenergie folgenden Wert:

$$\frac{5}{4}\frac{L^2}{MR^2} = \frac{1}{5}Mv^2.$$

Für ein mit $v = c$ rotierendes Universum ergibt sich nach dem Energiesatz

$$\frac{1}{5}Mv^2+\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}=Mc^2$$

ein Radius von

$$R=\frac{3}{4}\frac{GM}{c^2}.$$

Ein expandierendes und rotierendes Universum kann allgemein durch eine quadratische Gleichung der Form

$$r^2-\frac{3}{5}\frac{GM}{c^2}r-\frac{5}{4}\frac{L^2}{M^2c^2}=0$$

beschrieben werden, mit den beiden Lösungen

$$r_{1,2}=\frac{3}{10}\frac{GM}{c^2}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{10}\frac{GM}{c^2}\right)^2+\frac{5}{4}\frac{L^2}{M^2c^2}}.$$

Ein nichtrotierendes Universum $(L=0)$ besitzt demnach einen Radius von

$$R=\frac{3}{10}\frac{GM}{c^2}+\sqrt{\left(\frac{3}{10}\frac{GM}{c^2}\right)^2+\frac{5}{4}\frac{L^2}{M^2c^2}}=\frac{3}{5}\frac{GM}{c^2}.$$

Für ein rotierendes All erhalten wir nach Einsetzen des Drehimpulserhaltungssatzes

$$L=\frac{2}{5}Mr^2\omega=\frac{2}{5}Mrv$$

einen Radius von

$$r=\frac{3}{5}\frac{GM}{c^2}\Bigg/\left(1-\frac{1}{5}\frac{v^2}{c^2}\right),$$

der für $v\to c$ gegen den Wert

$$R=\frac{3}{4}\frac{GM}{c^2}$$

strebt. Rechnen wir hingegen mit einem Massenpunkt, so wäre $R$ auch ganz ohne Massenzuwachs gleich Unendlich, sofern die Ruhemasse konstant bliebe. Da die Ruhemasse jedoch nicht konstant bleibt, sondern mit wachsender Geschwindigkeit gegen Null geht, also eine vollständige Umwandlung in dunkle Energie erfährt, verschwindet das All am Ende in einer Singularität vom Radius null. Das bedeutet jedoch nichts anderes, als daß sich die gesamte sichtbare Materie als dunkle Materie in einem supermassereichen Schwarzen Loch wiederfindet.

 