Aufgabe: Welche thermodynamischen Relationen würden für unser Universum gelten, wenn es als einatomiges ideales Gas behandelt wird, das einer adiabatischen Zustandsgleichung genügt? Zeigen Sie zunächst, daß der Adiabatenexponent für ein einatomiges ideales Gas gleich 5/3 sein muß und leiten Sie daraus die Beziehungen zwischen den Zustandsgrößen her. Nehmen Sie an, daß das Universum Kugelgestalt habe und die Energie erhalten bleibt. Berechnen Sie die entsprechenden Zusammenhänge auch aus der Entropieänderung.

Lösung: Nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik ist eine Erhöhung der inneren Energie U mit einer am System verrichteten Arbeit dW sowie einer Wärmezufuhr dQ gekoppelt:

$$dU = dW + dQ.$$

Die innere Energie eines einatomigen idealen Gases beträgt

$$U = \frac{3}{2} NkT,$$

wobei k die Boltzmann-Konstante ist, T die absolute Temperatur und N die Teilchenzahl. Die am System verrichtete Arbeit wird positiv gezählt, wenn sich das Volumen V verringert, daher gilt

$$dW = -pdV,$$

wobei p der Druck ist. Druck und Volumen sollen über die adiabatische Zustandsgleichung

$$pV^{\kappa} = \text{const}$$

miteinander verknüpft sein, wobei κ der Adiabatenexponent ist. Ein adiabatisches System ist dadurch gekennzeichnet, daß Wärme weder zu- noch abgeführt wird, d.h. $dQ = 0$. Dann gilt nach dem ersten Hauptsatz

$$\frac{3}{2} NkdT + pdV = 0.$$

Setzen wir die adiabatische Zustandsgleichung in den ersten Hauptsatz ein, so folgt

$$\frac{3}{2} NkdT + \text{const}\,\frac{dV}{V^{\kappa}} = 0$$

und nach Integration

$$\frac{3}{2} Nk\int_{T_1}^{T_2} dT + \text{const}\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^{\kappa}} = 0.$$

Führen wir die Integrale aus, so erhalten wir

$$\frac{3}{2} Nk\left(T_2 - T_1\right) + \frac{1}{-\kappa+1}\left(\text{const}\cdot V_2^{-\kappa+1} - \text{const}\cdot V_1^{-\kappa+1}\right) = 0.$$

Wird nun noch die Konstante entsprechend gewählt, so ergibt sich

$$\frac{3}{2}(1-\kappa)Nk(T_2-T_1)+\left(p_2V_2^{\kappa}\cdot V_2^{-\kappa+1}-p_1V_1^{\kappa}\cdot V_1^{-\kappa+1}\right)=0.$$

Vereinfacht man diesen Ausdruck:

$$\frac{3}{2}(1-\kappa)Nk(T_2-T_1)+\left(p_2V_2-p_1V_1\right)=0,$$

dann muß

$$p_2V_2-p_1V_1=\frac{3}{2}(\kappa-1)Nk(T_2-T_1)$$

gelten bzw. $\kappa-1=2/3$ oder $\kappa=5/3$, damit die Differenz der idealen Gasgleichung genügt. Folglich besitzt die Zustandsgleichung eines adiabatischen Systems die Form

$$pV^{\kappa}=\frac{3}{2}(\kappa-1)NkTV^{\kappa-1}.$$

Daraus leiten sich folgende Zusammenhänge ab:

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{V_1^{\kappa}}{V_2^{\kappa}},\quad \frac{T_2}{T_1}=\frac{V_1^{\kappa-1}}{V_2^{\kappa-1}},\quad \frac{T_2}{T_1}=\frac{p_2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}{p_1^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}.$$

Mit einem Adiabatenexponenten von 5/3 für ein einatomiges ideales Gas sind die Zustandsgrößen in einem expandierenden Universum wie folgt miteinander verknüpft:

$$p=\frac{p_0V_0^{5/3}}{V^{5/3}},\quad T=\frac{T_0V_0^{2/3}}{V^{2/3}},\quad p=\frac{p_0}{T_0^{5/2}}T^{5/2}.$$

Unter Annahme der Kugelgestalt[1] gilt

$$V=\frac{4\pi}{3}r^3.$$

Damit können wir die obigen Relationen auch wie folgt formulieren:

$$p=\frac{p_0r_0^5}{r^5},\quad T=\frac{T_0r_0^2}{r^2},\quad p=\frac{p_0}{\sqrt{T_0}^5}\sqrt{T}^5,$$

d.h. der Druck nimmt umgekehrt proportional zur 5. Potenz des Radius ab, die Temperatur umgekehrt proportional zum Quadrat, und der Druck folgt der 5. Potenz aus der Wurzel der Temperatur.

Die obigen Relationen können ebenso aus der Entropieänderung des Universums hergeleitet werden. Wir gehen dazu vom 1. Hauptsatz in folgender Form aus,

$$dU=dW+TdS,$$

[1] Aus Vereinfachungsgründen. Natürlich ist das wahre Universum gekrümmt.

und wandeln entsprechend um:

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T}dV.$$

Für ein einatomiges ideales Gas ist die Änderung der inneren Energie

$$dU = \frac{3}{2}NkdT,$$

und mit Hilfe der idealen Gasgleichung $pV = NkT$ lautet das Entropiedifferential:

$$dS = \frac{3}{2}Nk\frac{dT}{T} + Nk\frac{dV}{V}.$$

Integration liefert

$$\Delta S = \frac{3}{2}Nk\int_{T_0}^{T}\frac{dT}{T} + Nk\int_{V_0}^{V}\frac{dV}{V} = \frac{3}{2}Nk\ln\frac{T}{T_0} + Nk\ln\frac{V}{V_0} = Nk\ln\frac{V}{V_0}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}.$$

Da sich die Entropie bei adiabatischen Vorgängen nicht ändert, muß das Argument des Logarithmus gleich eins sein, was genau der zweiten Isentropengleichung entspricht:

$$\frac{T}{T_0}\left(\frac{V}{V_0}\right)^{2/3} = 1.$$

Um die Entropieänderung über die Druckabhängigkeit zu berechnen, formen wir das totale Volumendifferential mit Hilfe der idealen Gasgleichung entsprechend um:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp = \frac{Nk}{p}dT - \frac{NkT}{p^2}dp.$$

Das Entropiedifferential nimmt dann die folgende Gestalt an:

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T}dV = \frac{5}{2}Nk\frac{dT}{T} - Nk\frac{dp}{p}.$$

Integrieren wir auf, so ergibt sich

$$\Delta S = \frac{5}{2}Nk\int_{T_0}^{T}\frac{dT}{T} - Nk\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p} = \frac{5}{2}Nk\ln\frac{T}{T_0} - Nk\ln\frac{p}{p_0} = Nk\ln\frac{p_0}{p}\sqrt{\frac{T}{T_0}}^{5}.$$

Da sich die Entropie des Universums nicht ändert, weil von außen keine Wärme zugeführt wird, ist

$$\frac{p_0}{p}\sqrt{\frac{T}{T_0}}^{5} = 1,$$

was der dritten Isentropengleichung entspricht. Sämtliche Herleitungen gelten unter der Annahme, daß das Universum ein abgeschlossenes System ist. Wenn das zutrifft, ist die These vom Wärmetod des Alls definitiv falsch. Was wir erkennen können ist, daß Druck und Temperatur des Universums mit seiner Ausdehnung zwar immer weiter abnehmen, sich aber dafür die dunkle Materie immer weiter anreichert, wohingegen die sichtbare Materie in Schwarzen Löchern verschwindet. Während also die Entropie des sichtbaren Teils des Universums immer weiter sinkt (sonst hätten sich keine Galaxien gebildet und es hätte sich auch kein Leben entwickeln können), nimmt die Entropie der Schwarzen Löcher immer weiter zu, bis es irgendwann zu einem Gravitationskollaps kommt und die dunkle Materie sich unter gewaltigem Temperaturanstieg in einem erneuten Urknall komplett in sichtbare Materie zurückverwandelt. Dieser Zyklus wiederholt sich unendlich oft, das Universum kennt keinen Anfang und kein Ende. Es verhält sich wie ein reibungsfrei sich drehendes Rad, dessen Drehimpuls erhalten bleibt. Zu keiner Zeit kann eine Verletzung des Energie-, Impuls-, Massen oder Drehimpulserhaltungssatzes auftreten, denn wenn das der Fall wäre, müßte die Welt erschaffen worden sein. Doch bereits die Alten Griechen wußten, daß man Seiendes weder erschaffen noch vernichten kann.

