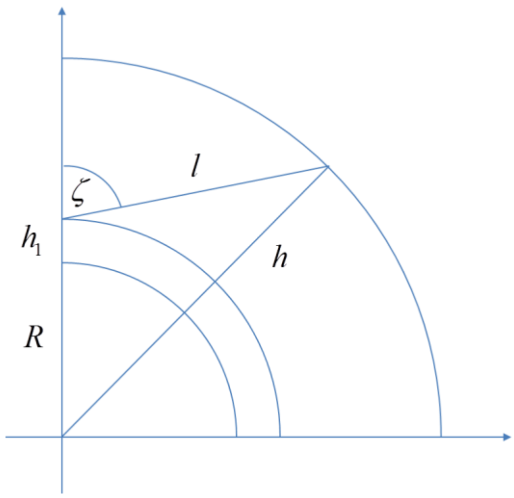
Aufgabe: Berechnen Sie die reduzierte Weglänge sowie die relative Luftmasse zwischen zwei beliebigen Punkten der Atmosphäre.

Lösung: Betrachten wir das folgende Schaubild mit der eingezeichneten Weglänge *l*, dem Zenitwinkel ζ sowie dem Erdradius *R* und den Höhen h und h_1.



Da *l* von beiden Höhen h und h_1 abhängt, gilt für einen Beobachter in der Höhe h_1

$$(R+h)^2 = l^2 + (R+h_1)^2 + 2l(R+h_1)\cos\zeta,$$

wobei wir die Identität $\cos(\pi-\zeta) = -\cos\zeta$ benutzt haben. Diesen Ausdruck formen wir um in die quadratische Gleichung;

$$l^2 + 2l(R+h_1)\cos\zeta + (R+h_1)^2 - (R+h)^2 = 0$$

deren positive Wurzel die Höhenabhängigkeit der Länge liefert:

$$l = -(R+h_1)\cos\zeta + \sqrt{(R+h)^2 - (R+h_1)^2\sin^2\zeta}.$$

Differenzieren wir diesen Ausdruck nach *h*, so lautet das Differential

$$dl = \frac{R+h}{\sqrt{(R+h)^2 - (R+h_1)^2\sin^2\zeta}}\,dh.$$

Da aus der Massenerhaltung folgt, daß das Produkt aus Dichte ρ und Schrägabstand dl genauso groß sein muß wie das Produkt aus der Dichte $\rho(h_1)$ mit der reduzierten Entfernung dm, leitet sich die reduzierte Weglänge aus dem Differential

$$dm = \frac{\rho(h)}{\rho(h_1)}\,dl$$

her. Unter der Annahme einer exponentiellen Dichteabnahme mit der Höhe h, $\rho = \rho_0 e^{-h/H}$, folgt damit

$$dm = \frac{R+h}{\sqrt{(R+h)^2 - (R+h_1)^2 \sin^2\zeta}} e^{-(h-h_1)/H} dh.$$

Darin ist die Skalenhöhe H diejenige Höhe, in der die Dichte auf 1/e abgefallen ist. Somit ist die reduzierte Weglänge in den Grenzen von h_1 bis h_2 gegeben durch

$$\begin{aligned} m(\zeta) &= \int_{h_1}^{h_2} e^{-(h-h_1)/H} \frac{R+h}{\sqrt{(R+h)^2 - (R+h_1)^2 \sin^2\zeta}} dh \\ &= \int_0^{h_2-h_1} e^{-h/H} \frac{R_1+h}{\sqrt{(R_1+h)^2 - R_1^2 \sin^2\zeta}} dh, \end{aligned}$$

wobei $R_1 = R + h_1$. Formen wir entsprechend um,

$$m(\zeta) = \int_0^{\Delta h} e^{-h/H} \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{R_1^2 \sin^2\zeta}{(R_1+h)^2}}} dh,$$

so folgt anhand der Näherung

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\zeta\left(1+\dfrac{h}{R_1}\right)^{-2}}} = \frac{1}{\cos\zeta}\frac{1}{\sqrt{1+2\tan^2\zeta\,\dfrac{h}{R_1}}} \approx \frac{1}{\cos\zeta}\left(1-\tan^2\zeta\,\frac{h}{R_1}+\frac{3}{2}\tan^4\zeta\,\frac{h^2}{R_1^2}\right)$$

der Ausdruck

$$m(\zeta) = \frac{1}{\cos\zeta}\int_0^{\Delta h} e^{-h/H} dh - \frac{1}{R_1\cos\zeta}\tan^2\zeta\int_0^{\Delta h} e^{-h/H} h dh + \frac{3}{2}\frac{1}{R_1^2\cos\zeta}\tan^4\zeta\int_0^{\Delta h} e^{-h/H} h^2 dh.$$

Die darin enthaltenen Integrale ergeben

$$\int_0^{\Delta h} e^{-h/H} dh = -H\left[e^{-h/H}\right]_0^{\Delta h} = H\left(1-e^{-\Delta h/H}\right),$$

$$\int_0^{\Delta h} e^{-h/H} h dh = \left[-H^2 e^{-h/H}\left(\frac{h}{H}+1\right)\right]_0^{\Delta h} = H^2\left(1-e^{-\Delta h/H}\right) - H\Delta h e^{-\Delta h/H},$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta h} e^{-h/H} h^2 dh &= \left[-e^{-h/H}\left(Hh^2 + 2H^2 h + 2H^3\right)\right]_0^{\Delta h} \\ &= 2H^3\left(1-e^{-\Delta h/H}\right) - 2H^2\Delta h e^{-\Delta h/H} - H\Delta h^2 e^{-\Delta h/H}. \end{aligned}$$

Somit können wir die reduzierte Masse wie folgt vereinfachen:

$$m(\zeta) = \frac{H}{\cos\zeta}\left(1 - \frac{H}{R_1}\tan^2\zeta + 3\frac{H^2}{R_1^2}\tan^4\zeta\right)\left(1 - e^{-\Delta h/H}\right)$$
$$+ \frac{H}{\cos\zeta}\frac{\Delta h}{R_1}\tan^2\zeta\left(1 - 3\frac{H}{R_1}\tan^2\zeta - \frac{3}{2}\frac{\Delta h}{R_1}\tan^2\zeta\right)e^{-\Delta h/H}.$$

Bei senkrechtem Einfall gilt

$$m(0) = \int_{h_1}^{h_2} e^{-(h-h_1)/H}\,dh = \int_0^{h_2-h_1} e^{-h/H}\,dh = H\left(1 - e^{-\Delta h/H}\right).$$

Das Verhältnis aus reduzierter Luftmasse bei Schrägeinfall relativ zur Zenitrichtung, die sogenannte relative Luftmasse, ergibt sich somit zu

$$m_r = \frac{m(\zeta)}{m(0)} = \frac{1}{\cos\zeta}\left(1 - \frac{H}{R_1}\tan^2\zeta + 3\frac{H^2}{R_1^2}\tan^4\zeta\right)$$
$$+ \frac{1}{\cos\zeta}\frac{\Delta h}{R_1}\tan^2\zeta\left(1 - 3\frac{H}{R_1}\tan^2\zeta - \frac{3}{2}\frac{\Delta h}{R_1}\tan^2\zeta\right)\frac{e^{-\Delta h/H}}{1 - e^{-\Delta h/H}}$$

Für $h_1 = 0$ bzw. $\Delta h = h$ geht $R_1 \to R$ und es gilt

$$m_r = \frac{1}{\cos\zeta}\left\{1 - \frac{H}{R}\tan^2\zeta + 3\frac{H^2}{R^2}\tan^4\zeta\right.$$
$$\left. + \frac{h}{R}\tan^2\zeta\left(1 - 3\frac{H}{R}\tan^2\zeta - \frac{3}{2}\frac{h}{R}\tan^2\zeta\right)\frac{e^{-h/H}}{1 - e^{-h/H}}\right\}.$$

Für die Skalenhöhe ist der bekannte Wert von 8,4 km zu verwenden. Der Zenitwinkel sollte auf Werte kleiner 60 Grad begrenzt werden, da der Tangens sonst zu stark ansteigt.

