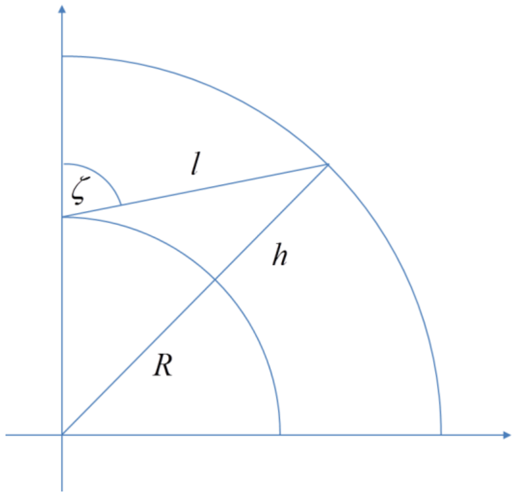
Aufgabe: Berechnen Sie die reduzierte Weglänge sowie die relative Luftmasse beim Durchtritt eines Lichtstrahls durch die Atmosphäre. Wie lauten diese Größen, wenn die Strahlung nicht aus dem Unendlichen, sondern aus einer bestimmten Höhe auf den Boden trifft?

Lösung: Betrachten wir das folgende Schaubild mit der eingezeichneten Weglänge l, dem Zenitwinkel ζ sowie dem Erdradius R und der Höhe h.



Da l von der Höhe h abhängt, gilt für einen Beobachter am Boden

$$(R+h)^2 = l^2 + R^2 + 2lR\cos\zeta,$$

wobei wir die Identität $\cos(\pi-\zeta) = -\cos\zeta$ benutzt haben. Diesen Ausdruck formen wir um in die quadratische Gleichung;

$$l^2 + 2lR\cos\zeta - \left(2Rh + h^2\right) = 0,$$

deren positive Wurzel die Höhenabhängigkeit der Länge liefert:

$$l = -R\cos\zeta + \sqrt{R^2\cos^2\zeta + 2Rh + h^2}.$$

Differenzieren wir diesen Ausdruck nach h, so lautet das Differential

$$dl = \frac{R+h}{\sqrt{R^2\cos^2\zeta + 2Rh + h^2}}\,dh.$$

Da aus der Massenerhaltung folgt, daß das Produkt aus Dichte ρ und Schrägabstand dl genauso groß sein muß wie die Dichte ρ_0 am Boden in der reduzierten Entfernung dm, leitet sich die reduzierte Weglänge aus dem Differential

$$dm = \frac{\rho}{\rho_0}\,dl$$

her. Unter der Annahme einer exponentiellen Dichteabnahme mit der Höhe $\rho = \rho_0 e^{-h/H}$ folgt damit

$$dm = \frac{R+h}{\sqrt{R^2\cos^2\zeta + 2Rh + h^2}}\, e^{-h/H}\, dh.$$

Darin ist die Skalenhöhe H diejenige Höhe, in der die Dichte auf 1/e abgefallen ist. Somit ist die reduzierte Weglänge in den Grenzen von Null bis Unendlich gegeben durch

$$m(\zeta) = \int_0^\infty e^{-h/H}\, \frac{R+h}{\sqrt{R^2\cos^2\zeta + 2Rh + h^2}}\, dh,$$

bei senkrechtem Einfall gilt

$$m(0) = \int_0^\infty e^{-h/H}\, dh = -H\left[e^{-h/H}\right]_0^\infty = H.$$

Damit erhalten wir für das Verhältnis aus reduzierter Luftmasse bei Schrägeinfall und Zenitrichtung, die sogenannte relative Luftmasse, den allgemeinen Ausdruck

$$\begin{aligned} m_r &= \frac{m(\zeta)}{m(0)} = \frac{1}{H}\int_0^\infty e^{-h/H}\, \frac{R+h}{\sqrt{R^2\cos^2\zeta + 2Rh + h^2}}\, dh \\ &= \frac{1}{H}\int_0^\infty e^{-h/H}\, \frac{R+h}{\sqrt{(R+h)^2 - R^2\sin^2\zeta}}\, dh = \frac{1}{H}\int_0^\infty e^{-h/H}\, \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{R^2\sin^2\zeta}{(R+h)^2}}}\, dh. \end{aligned}$$

Um weiter zu vereinfachen, entwickeln wir den Ausdruck unter der Wurzel mit Hilfe der binomischen Näherung in eine Potenzreihe bis zur ersten Ordnung:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\zeta\left(1+\dfrac{h}{R}\right)^{-2}}} = \frac{1}{\cos\zeta}\, \frac{1}{\sqrt{1 + 2\tan^2\zeta\, \dfrac{h}{R}}}.$$

Eine nochmalige Näherung bis zur zweiten Ordnung liefert

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 2\tan^2\zeta\, \dfrac{h}{R}}} \approx 1 - \tan^2\zeta\, \frac{h}{R} + \frac{3}{2}\tan^4\zeta\, \frac{h^2}{R^2}.$$

Die relative Luftmasse ergibt sich somit nach anschließender Integration zu

$$m_r = \frac{1}{H\cos\zeta}\int_0^\infty e^{-h/H}\, dh - \frac{\tan^2\zeta}{HR\cos\zeta}\int_0^\infty e^{-h/H}\, h\, dh + \frac{3}{2}\,\frac{\tan^4\zeta}{HR^2\cos\zeta}\int_0^\infty e^{-h/H}\, h^2\, dh$$

Die zusätzlich benötigten Integrale lauten

$$\int_0^\infty e^{-h/H} h\,dh = \left[-H^2 e^{-h/H}\left(\frac{h}{H}+1\right)\right]_0^\infty = H^2,$$
$$\int_0^\infty e^{-h/H} h^2 dh = \left[-e^{-h/H}\left(Hh^2+2H^2h+2H^3\right)\right]_0^\infty = 2H^3.$$

Daraus erhalten wir schließlich das endgültige Resultat

$$m_r = \frac{1}{\cos\zeta}\left(1-\tan^2\zeta\,\frac{H}{R}+3\tan^4\zeta\,\frac{H^2}{R^2}\right).$$

Wenn die Atmosphäre von der Strahlung nicht vollkommen durchdrungen wird, sondern erst ab einer gewissen Höhe, folgt für die reduzierte Weglänge in den Grenzen von 0 bis h

$$m(\zeta) = \int_0^h e^{-h/H}\,\frac{R+h}{\sqrt{R^2\cos^2\zeta+2Rh+h^2}}\,dh,$$

sowie bei senkrechtem Einfall

$$m(0) = \int_0^h e^{-h/H} dh = -H\left[e^{-h/H}\right]_0^h = H\left(1-e^{-h/H}\right).$$

In den reduzierten Grenzen ergibt sich die relative Luftmasse zu

$$m_r = \frac{1}{H\cos\zeta}\int_0^h e^{-h/H} dh - \frac{\tan^2\zeta}{HR\cos\zeta}\int_0^h e^{-h/H} h\,dh + \frac{3}{2}\frac{\tan^4\zeta}{HR^2\cos\zeta}\int_0^h e^{-h/H} h^2 dh.$$

Hier lauten die benötigten Integrale

$$\int_0^h e^{-h/H} h\,dh = \left[-H^2 e^{-h/H}\left(\frac{h}{H}+1\right)\right]_0^h = H^2\left(1-e^{-h/H}\right) - Hhe^{-h/H},$$
$$\int_0^h e^{-h/H} h^2 dh = \left[-e^{-h/H}\left(Hh^2+2H^2h+2H^3\right)\right]_0^h = 2H^3\left(1-e^{-h/H}\right) - 2H^2he^{-h/H} - Hh^2e^{-h/H},$$

so daß das endgültige Ergebnis mittels zweier Zusatzterme ausgedrückt werden kann als

$$m_r = \frac{1}{\cos\zeta}\left\{\left(1-\tan^2\zeta\,\frac{H}{R}+3\tan^4\zeta\,\frac{H^2}{R^2}\right)\left(1-e^{-h/H}\right)\right.$$
$$\left. + \left(1-3\tan^2\zeta\,\frac{H}{R}\right)\tan^2\zeta\,\frac{h}{R}e^{-h/H} - \frac{3}{2}\tan^4\zeta\,\frac{h^2}{R^2}e^{-h/H}\right\}.$$

Für die Skalenhöhe ist der bekannte Wert von 8,4 km zu verwenden. Der Zenitwinkel sollte auf Werte kleiner 60 Grad begrenzt werden, da der Tangens sonst zu stark ansteigt.

