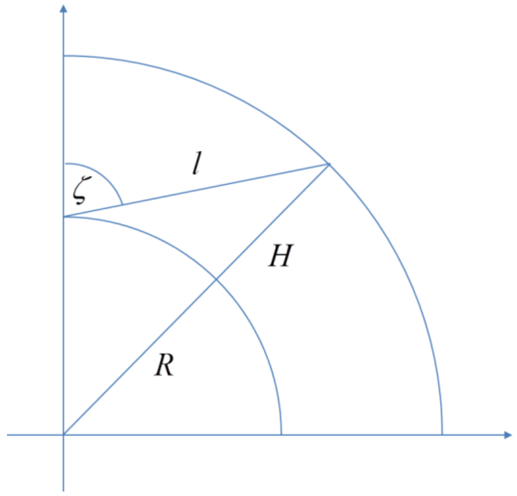
Aufgabe: Berechnen Sie die absolute (optische) Luftmasse der Atmosphäre unter Annahme einer konstanten Dichte.

Lösung: Betrachten wir eine Atmosphäre der Dicke H sowie einen unter dem Zenitwinkel ζ einfallenden Lichtstrahl der Weglänge l zwischen atmosphärischer Obergrenze und Boden.



Dabei ist H diejenige Höhe, der eine konstante Dichte in den Grenzen $0 \le h \le H$ entspricht:

$$\rho(h) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } 0 \le h \le H \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit dem Erdradius R und der Skalenhöhe H wenden wir nun auf den Schenkel $R + H$ den Kosinussatz an, der sich wie folgt darstellt:

$$(R + H)^2 = l^2 + R^2 + 2lR\cos\zeta .$$

Dabei haben wir den Komplementärwinkel mit Hilfe der Relation $\cos(\pi - \zeta) = -\cos\zeta$ in den Zenitwinkel umgewandelt. Den so erhaltenen Ausdruck formen wir um in eine quadratische Gleichung:

$$l^2 + 2lR\cos\zeta - \left(2RH + H^2\right) = 0$$

mit den Lösungen

$$l_{1,2} = -R\cos\zeta \pm \sqrt{R^2\cos^2\zeta + 2RH + H^2} .$$

Wählen wir das positive Vorzeichen, so folgt für die Luftmasse AM (engl. *Air mass*), also das Verhältnis aus optischer Weglänge bei Schrägsicht und senkrechtem Einfall, die Relation

$$\mathrm{AM}(\zeta) \equiv \frac{l(\zeta)}{l(0)} = \frac{-R\cos\zeta + \sqrt{(R + H)^2 - R^2\sin^2\zeta}}{H} .$$

Für einen Winkel von $\zeta = 90°$ vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\mathrm{AM}(\pi/2) = \frac{\sqrt{(R+H)^2 - R^2}}{H} = \frac{\sqrt{2RH + H^2}}{H} = \sqrt{1 + \frac{2R}{H}}.$$

Bei einer Skalenhöhe von 8,4 km und einem mittleren Erdradius von 6378 km beträgt die relative Luftmasse ungefähr 38,98.

Einen näherungsweisen Ausdruck für Winkel < 60° erhalten wir, wenn wir zunächst wie folgt umformen:

$$\mathrm{AM}(\zeta) = -\frac{R\cos\zeta}{H} + \frac{R\cos\zeta}{H}\sqrt{1 + \frac{2RH + H^2}{R^2\cos^2\zeta}},$$

und dann den Wurzelausdruck mit Hilfe der binomischen Näherung weiter vereinfachen:

$$\mathrm{AM}(\zeta) \approx \frac{2R + H}{2R\cos\zeta} = \frac{1}{\cos\zeta}\left(1 + \frac{H}{2R}\right).$$

Weil $H << R,$ gilt angenähert

$$\mathrm{AM}(\zeta) \approx \frac{1}{\cos\zeta} = \sec\zeta.$$

