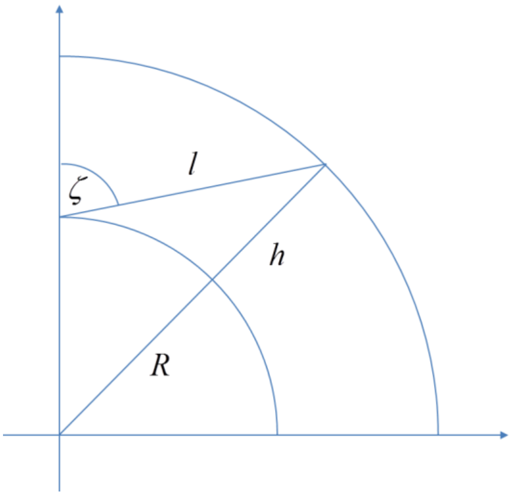
Aufgabe: Berechnen Sie die reduzierte Weglänge und die relative Luftmasse der Atmosphäre unter der Annahme eines exponentiell abfallenden Drucks mit Hilfe der barometrischen Höhenformel.

Lösung: Betrachten wir zur Veranschaulichung das folgende Bild mit eingezeichneter Weglänge *l*, Zenitwinkel ζ, Erdradius *R* und Höhe *h* über Grund.



Wenden wir auf den Schenkel $R+h$ den Kosinussatz an, so gilt für einen Beobachter am Boden:

$$(R+h)^2 = l^2 + R^2 + 2lR\cos\zeta,$$

wobei wir die Identität $\cos(\pi-\zeta) = -\cos\zeta$ benutzt haben. Diesen Ausdruck formen wir um in eine quadratische Gleichung;

$$l^2 + 2lR\cos\zeta - \left(2Rh + h^2\right) = 0,$$

deren Lösungen gegeben sind durch

$$l_{1,2} = -R\cos\zeta \pm \sqrt{R^2\cos^2\zeta + 2Rh + h^2}.$$

Die Ableitung der Lösung mit dem positiven Vorzeichen nach der Höhe *h* erhalten wir zu

$$dl = \frac{R+h}{\sqrt{R^2\cos^2\zeta + 2Rh + h^2}}\,dh.$$

Da *h* in der Regel klein gegen den Erdradius *R* ist, folgt in erster Näherung die bekannte Sekans-Beziehung

$$\frac{R+h}{\sqrt{R^2\cos^2\zeta + 2Rh + h^2}} \approx \frac{1}{\cos\zeta} = \sec\zeta,$$

wobei das differentielle Linienelement näherungsweise gegeben ist durch

$$dl = -\sec\zeta dh.$$

Die Konvention erfordert nämlich, daß l in Richtung der einfallenden Strahlung positiv gerechnet werden muß. Da zwei Massen eines idealen Gases unterschiedlicher Dichte bei gleicher Querschnittsfläche des Behälters unterschiedliche Höhen einnehmen, leitet sich die reduzierte Weglänge m aus dem Verhältnis der Dichten gemäß der Beziehung

$$m = \frac{\rho}{\rho_0} l$$

ab. Für das Differential folgt demnach

$$dm = -\frac{\rho}{\rho_0} dl = -\frac{\rho}{\rho_0} \frac{R+h}{\sqrt{R^2 \cos^2 \zeta + 2Rh + h^2}} dh.$$

Unter der Annahme, daß die Dichte exponentiell mit der Höhe abnimmt, d.h.

$$\rho = \rho_0 e^{-h/H},$$

folgt für die reduzierte Weglänge in den Grenzen von Null bis Unendlich

$$m(\zeta) = \int_0^\infty e^{-h/H} \frac{R+h}{\sqrt{R^2 \cos^2 \zeta + 2Rh + h^2}} dh.$$

Dabei gibt die Skalenhöhe H an, in welcher Höhe sich die am Boden herrschende und nach einem Exponentialgesetz abfallende Luftdichte ρ_0 um die Eulersche Zahl e verringert hat.

Für die reduzierte Weglänge bei senkrechtem Einfall erhalten wir die einfache Beziehung

$$m(0) = \int_0^\infty e^{-h/H} dh = -H\left[e^{-h/H}\right]_0^\infty = H.$$

Damit folgt für die relative Luftmasse

$$m_r \equiv \frac{m(\zeta)}{m(0)},$$

d.h. für das Verhältnis aus Weglänge bei Schrägsicht und senkrechtem Einfall, die Relation

$$\begin{aligned} m_r &= \frac{1}{H} \int_0^\infty e^{-h/H} \frac{R+h}{\sqrt{(R+h)^2 - R^2 \sin^2 \zeta}} dh \\ &= \frac{1}{H} \int_0^\infty e^{-h/H} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R^2 \sin^2 \zeta}{(R+h)^2}}} dh. \end{aligned}$$

Mittels der binomischen Näherung formen wir diesen Ausdruck wie folgt um:

$$m_r = \frac{1}{H}\int_0^\infty e^{-h/H} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\zeta\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2}}}dh = \frac{1}{H}\int_0^\infty e^{-h/H} \frac{1}{\sqrt{\cos^2\zeta + 2\sin^2\zeta\,\frac{h}{R}}}dh$$
$$= \frac{1}{H\cos\zeta}\int_0^\infty e^{-h/H} \frac{1}{\sqrt{1+2\tan^2\zeta\,\frac{h}{R}}}dh.$$

Ersetzen wir den Tangens trigonometrisch durch den Kosinus und vernachlässigen den letzten Term mit dem geringsten Beitrag, so ergibt sich

$$m_r = \frac{1}{H\cos\zeta}\frac{R\cos^2\zeta}{2}\int_0^\infty e^{-h/H} \frac{1}{\sqrt{1+2\frac{1-\cos^2\zeta}{\cos^2\zeta}\frac{h}{R}}}\,d\,\frac{2h}{R\cos^2\zeta}$$
$$\approx \frac{\cos\zeta}{2}\frac{R}{H}\int_0^\infty e^{-h/H} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{\cos^2\zeta}\frac{h}{R}}}\,d\,\frac{2h}{R\cos^2\zeta}.$$

Durch Multiplikation der Integrationsvariablen mit konstanten Termen gelangen wir schließlich zu der Vereinfachung

$$m_r = \frac{\cos\zeta}{2}\frac{R}{H}\int_0^\infty e^{-\frac{R\cos^2\zeta}{2H}x}\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx = \frac{\cos\zeta}{2}\frac{R}{H}e^{\frac{R\cos^2\zeta}{2H}}\int_1^\infty e^{-\frac{R\cos^2\zeta}{2H}x}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$
$$= \cos\zeta\,\frac{R}{H}e^{\frac{R\cos^2\zeta}{2H}}\int_1^\infty e^{-\sqrt{x}^2\frac{R\cos^2\zeta}{2H}}d\sqrt{x},$$

wobei wir noch von den Substitutionen

$$x = \sqrt{x}^2 \quad \text{und} \quad dx = 2\sqrt{x}d\sqrt{x}$$

Gebrauch gemacht haben. Mit Hilfe der Definition der komplementären Gaußschen Fehlerfunktion

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}dt$$

lautet das endgültige Resultat

$$m_r = \sqrt{\frac{2R}{H}} e^{\frac{R\cos^2\zeta}{2H}} \int\limits_{\sqrt{\frac{R\cos^2\zeta}{2H}}}^{\infty} e^{-x^2 \sqrt{\frac{R\cos^2\zeta}{2H}}^2} d\left(\sqrt{\frac{R\cos^2\zeta}{2H}} x\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2R}{H}} e^{\frac{R\cos^2\zeta}{2H}} \int\limits_{\sqrt{\frac{R\cos^2\zeta}{2H}}}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi R}{2H}} e^{\frac{R\cos^2\zeta}{2H}} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{R\cos^2\zeta}{2H}}\right).$$

Dieses Ergebnis stimmt exakt mit dem Resultat von A. T. Young überein.[1]

Für die praktische Berechnung der Fehlerfunktion muß auf numerische Verfahren zurückgegriffen werden. In der angenommenen Modellatmosphäre beträgt die Skalenhöhe *H* bei einer Temperatur von 15 °C etwa 8,4 km.

[1] Young, A. T. 1974. Atmospheric Extinction. Ch. 3.1 in *Methods of Experimental Physics*, Vol. 12 *Astrophysics*, Part A: *Optical and Infrared*. ed. N. Carleton. New York: Academic Press.

