Aufgabe: Berechnen Sie die Unschärferelation für ein um einen Kern kreisendes Elektron in den Scheitelpunkten der Ellipse. Welche Schlußfolgerungen ziehen Sie daraus für die Quantenmechanik?

Lösung: Betrachten wir zunächst die Geometrie eines auf einer elliptischen Bahn um einen Kern kreisenden Elektrons gemäß nachfolgender Abbildung:

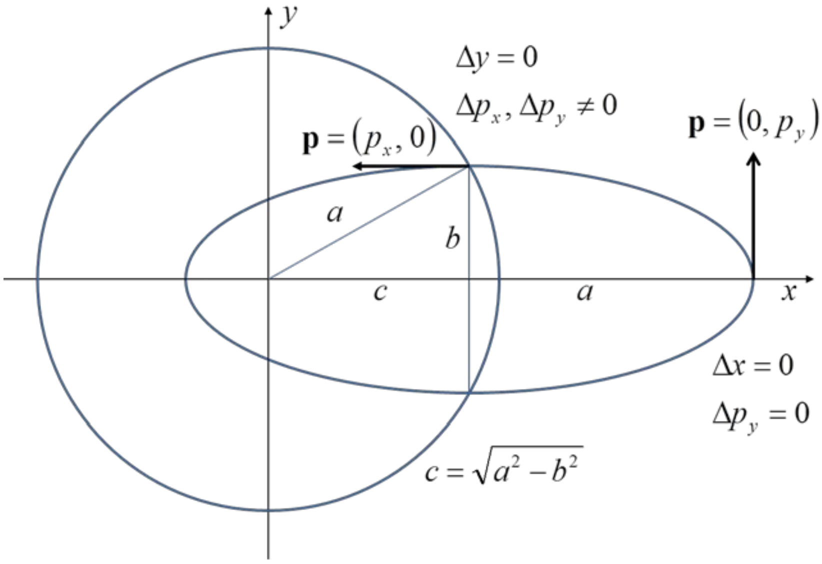

Abbildung 1. Bahnkurve eines auf einer Ellipse umlaufenden Elektrons im Vergleich zur Kreisbahn

Aussage des Flächensatzes ist es nun, daß der vom Brennpunkt der Ellipse zum Ort des Teilchens gezogene Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht, daß also die Flächengeschwindigkeit konstant ist. Diese Aussage folgt aus der Erhaltung des Drehimpulses der Bahnbewegung. Sei also $\mathbf{r}$ der vom Kern zum Elektron weisende Fahrstrahl ähnlich der Bewegung eines Planeten um die Sonne und $\mathbf{p}$ der Impuls des Elektrons. Dann ist der Drehimpuls $\mathbf{L}$ gegeben durch $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$. Wenn die Bewegung in einer Ebene erfolgt, wenn also Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ und Radiusvektor $\mathbf{r}$ aufeinander senkrecht stehen $(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\omega}=0)$, dann folgt aus der Definition des Drehimpulses unter Verwendung der Relation $\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$, daß der Drehimpuls

$$\mathbf{L}=m\mathbf{r}\times\mathbf{v}=m\mathbf{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})=m(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})\boldsymbol{\omega}-m(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\mathbf{r}=mr^2\boldsymbol{\omega}$$

proportional zum Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ ist. Dann und nur dann läßt sich die Winkelgeschwindigkeit auch schreiben als

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{\mathbf{r}\times\mathbf{v}}{|\mathbf{r}|^2}=\frac{1}{r}\mathbf{e}_r\times\left(\dot{r}\mathbf{e}_r+r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi\right)=\frac{1}{r}\mathbf{e}_r\times r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi=\frac{v_\varphi}{r}\mathbf{e}_z=\omega\mathbf{e}_z.$$

Bleibt der Drehimpuls wie in unserem Fall erhalten, gilt $\mathbf{L}=\mathbf{r}_1\times\mathbf{p}_1=\mathbf{r}_2\times\mathbf{p}_2$. Setzen wir

$$\mathbf{r}_1=\mathbf{r},\quad \mathbf{p}_1=\mathbf{p},\quad \mathbf{r}_2=\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r},\quad \mathbf{p}_2=\mathbf{p}+\Delta\mathbf{p}$$

in diese Gleichung ein, erhalten wir $\mathbf{r}\times\mathbf{p} = (\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})\times(\mathbf{p}+\Delta\mathbf{p})$ und nach Ausmultiplizieren des Vektorprodukts und Kürzen gleicher Terme

$$\mathbf{r}\times\Delta\mathbf{p} + \Delta\mathbf{r}\times\mathbf{p} + \Delta\mathbf{r}\times\Delta\mathbf{p} = 0.$$

In Einheitsvektoren eines kartesischen Koordinatensystems ausgedrückt lauten die Einheitsvektoren im Polarkoordinatensystem

$$\mathbf{e}_r = \cos\varphi\mathbf{e}_x + \sin\varphi\mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\mathbf{e}_x + \cos\varphi\mathbf{e}_y.$$

Damit hat der Ortsvektor

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r = r\cos\varphi\mathbf{e}_x + r\sin\varphi\mathbf{e}_y$$

die Koordinaten

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

wobei radialer Abstand r und Polarwinkel φ mit den kartesischen Koordinaten über die Relationen

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

verknüpft sind. Die zeitlichen Ableitungen der Einheitsvektoren im Polarkoordinatensystem ergeben sich somit zu

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_r &= -\dot\varphi\sin\varphi\mathbf{e}_x + \dot\varphi\cos\varphi\mathbf{e}_y = \dot\varphi\mathbf{e}_\varphi,\\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi &= -\dot\varphi\cos\varphi\mathbf{e}_x - \dot\varphi\sin\varphi\mathbf{e}_y = -\dot\varphi\mathbf{e}_r.\end{aligned}$$

Damit folgen für Geschwindigkeit und Beschleunigung die Ausdrücke

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot r\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r, \quad \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot r\mathbf{e}_r + \dot r\dot{\mathbf{e}}_r + \dot r\dot\varphi\mathbf{e}_\varphi + r\ddot\varphi\mathbf{e}_\varphi + r\dot\varphi\dot{\mathbf{e}}_\varphi$$

und nach Substitution der Ableitungen die endgültigen Formulierungen

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot r\mathbf{e}_r + r\dot\varphi\mathbf{e}_\varphi \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{v}} = m\left(\ddot r - r\dot\varphi^2\right)\mathbf{e}_r + m\left(r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi\right)\mathbf{e}_\varphi.$$

Hier ist m die Ruhemasse des Elektrons. Demnach haben Geschwindigkeit und Kraft die Polarkoordinatendarstellung

$$\begin{aligned}v_r &= \dot r, & v_\varphi &= r\dot\varphi,\\ \dot p_r &= m\left(\ddot r - r\dot\varphi^2\right), & \dot p_\varphi &= m\left(r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi\right).\end{aligned}$$

Ersetzen wir schließlich die Einheitsvektoren wieder durch kartesische, so folgt

$$\dot{\mathbf{r}} = (\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi)\mathbf{e}_x + (\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi)\mathbf{e}_y,$$
$$\dot{\mathbf{p}} = m\left(\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\cos\varphi - (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin\varphi\right)\mathbf{e}_x + m\left(\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\sin\varphi + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\cos\varphi\right)\mathbf{e}_y$$

oder in übersichtlicher Komponentenschreibweise

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi,$$
$$\dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi$$

bzw.

$$\dot{p}_x = m\left(\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\cos\varphi - (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin\varphi\right),$$
$$\dot{p}_y = m\left(\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\sin\varphi + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\cos\varphi\right).$$

Damit erhalten wir die Impulskomponenten zu

$$p_x = mv_x = m(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi), \quad p_y = mv_y = m(\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi).$$

Wandeln wir nun die differentiellen Größen in endliche um, so ergeben sich daraus die Orts- und Impulsunschärfen

$$\Delta x = (\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi)\Delta t,$$
$$\Delta y = (\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi)\Delta t$$

bzw.

$$\Delta p_x = m\left(\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\cos\varphi - (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin\varphi\right)\Delta t,$$
$$\Delta p_y = m\left(\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\sin\varphi + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\cos\varphi\right)\Delta t.$$

Wenn wir als Orts- und Impulsdifferenz $\Delta\mathbf{r} = \Delta x\mathbf{e}_x + \Delta y\mathbf{e}_y$ bzw. $\Delta\mathbf{p} = \Delta p_x\mathbf{e}_x + \Delta p_y\mathbf{e}_y$ ansetzen, läßt sich obige Vektorgleichung schreiben als

$$(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y)\times(\Delta p_x\mathbf{e}_x + \Delta p_y\mathbf{e}_y) + (\Delta x\mathbf{e}_x + \Delta y\mathbf{e}_y)\times(p_x\mathbf{e}_x + p_y\mathbf{e}_y) + (\Delta x\mathbf{e}_x + \Delta y\mathbf{e}_y)\times(\Delta p_x\mathbf{e}_x + \Delta p_y\mathbf{e}_y) = 0.$$

Die nicht verschwindenden Kreuzprodukte vereinfachen sich somit zu

$$(x\Delta p_y - y\Delta p_x)\mathbf{e}_z + (\Delta x p_y - \Delta y p_x)\mathbf{e}_z + (\Delta x\Delta p_y - \Delta y\Delta p_x)\mathbf{e}_z = 0,$$

wobei die Teilbeträge gliedweise verschwinden müssen. Die Glieder des ersten Terms

$$x\Delta p_y = mr\left(\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\sin\varphi\cos\varphi + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\cos^2\varphi\right)\Delta t,$$
$$y\Delta p_x = mr\left(\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\sin\varphi\cos\varphi - (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin^2\varphi\right)\Delta t$$

führen auf den Ausdruck

$$x\Delta p_y - y\Delta p_x = mr\left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)\Delta t,$$

der, wie wir später sehen werden, für eine Zentralkraft identisch verschwindet. Die Glieder des zweiten Terms sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\Delta x p_y &= m\left(\dot{r}^2 \sin\varphi\cos\varphi + r\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi\cos\varphi - r\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\varphi - r^2\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi\right)\Delta t,\\ \Delta y p_x &= m\left(\dot{r}^2 \cos\varphi\sin\varphi - r\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\varphi + \dot{r}r\dot{\varphi}\cos\varphi\cos\varphi - r^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi\right)\Delta t.\end{aligned}$$

Folglich gilt auch hier

$$\Delta x p_y - \Delta y p_x = 0.$$

Schließlich kommt man durch Subtraktion der Glieder des dritten Terms

$$\begin{aligned}\Delta x\Delta p_y &= m\left\{\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\left(\dot{r}\sin\varphi\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin^2\varphi\right) + \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)\left(\dot{r}\cos^2\varphi - r\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi\right)\right\}\Delta t^2,\\ \Delta y\Delta p_x &= m\left\{\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\left(\dot{r}\sin\varphi\cos\varphi + r\dot{\varphi}\cos^2\varphi\right) - \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)\left(\dot{r}\sin^2\varphi + r\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi\right)\right\}\Delta t^2\end{aligned}$$

zu dem Ergebnis

$$\Delta x\Delta p_y - \Delta y\Delta p_x = -m\left(r\dot{\varphi}\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) - \dot{r}\left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)\right)\Delta t^2,$$

das sich, wie wir später sehen werden, für eine Zentralkraft zu dem Ausdruck

$$\Delta x\Delta p_y - \Delta y\Delta p_x = -mr\dot{\varphi}\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\Delta t^2$$

vereinfachen läßt. Für weiterführende Rechnungen müssen wir zunächst die Bahngleichung der Ellipse herleiten, indem wir den Drehimpulserhaltungssatz $L = mr^2\dot{\varphi}$ in den Energieerhaltungssatz

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{k}{r} \quad \text{mit} \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_1 q_2 > 0$$

einsetzen, um zu der Darstellung

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

zu gelangen. Nach Trennung der Variablen können wir schreiben:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{L^2}{m^2 r^2} + \frac{2}{m}\frac{k}{r}}.$$

Bringen wir das differentielle Zeitelement auf die linke Seite,

$$dt = \frac{rdr}{\sqrt{\frac{2E}{m}r^2 + \frac{2k}{m}r - \frac{L^2}{m^2}}},$$

kann es direkt in den Drehimpulserhaltungssatz eingesetzt werden:

$$d\varphi = \frac{L}{mr^2}dt = \frac{L}{mr^2}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m}+\frac{2k}{mr}-\frac{L^2}{m^2r^2}}}.$$

Beidseitige Integration liefert

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{r_0}^{r}\frac{1}{r}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2}r^2+\frac{2mk}{L^2}r-1}}.$$

Nach Auswertung des Integrals mit den Parametern

$$\alpha = \frac{2mE}{L^2}, \quad \beta = \frac{2mk}{L^2}, \quad \gamma = -1$$

ergibt sich der einfache Ausdruck

$$\int\frac{dr}{r\sqrt{\alpha r^2+\beta r+\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\arcsin\frac{\beta r+2\gamma}{r\sqrt{-\Delta}},$$

wobei $\Delta = 4\alpha\gamma-\beta^2$ die Diskriminante ist, die sich nach Einsetzen der Parameter als negativ erweist:

$$\Delta = -\left(\frac{2mk}{L^2}\right)^2\left(1+\frac{2EL^2}{mk^2}\right) = -\frac{4}{L^2}\left(m^2\dot{r}^2+\left(\frac{mk}{L}-\frac{L}{r}\right)^2\right) < 0.$$

Den Polarwinkel formen wir damit wie folgt um:

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_0 + \left[\arcsin\frac{mkr-L^2}{r\sqrt{2mL^2E+m^2k^2}}\right]_{r_0}^{r} \\ &= \varphi_0 + \arccos\frac{1-\frac{L^2}{mkr_0}}{\sqrt{1+\frac{2EL^2}{mk^2}}} - \arccos\frac{1-\frac{L^2}{mkr}}{\sqrt{1+\frac{2EL^2}{mk^2}}}.\end{aligned}$$

Nach $1/r$ aufgelöst heißt das

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{L^2}\left[1-\sqrt{1+\frac{2EL^2}{mk^2}}\cos\left(\varphi-\varphi_0-\arccos\frac{1-\frac{L^2}{mkr_0}}{\sqrt{1+\frac{2EL^2}{mk^2}}}\right)\right].$$

Der Bahnparameter p sowie die numerische Exzentrizität e sind mit den physikalischen Erhaltungsgrößen L und E hierbei wie folgt verknüpft:

$$p = \frac{L^2}{mk} \quad \text{und} \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}\,.$$

Damit lautet die endgültige Bahngleichung

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\left(\varphi - \varphi_0 - \arccos\left(\frac{r_0 - p}{er_0}\right)\right)}.$$

Wenn wir noch als Startwert $\varphi_0 = 0$ annehmen, so folgt wegen $r_0 = p/(1-e)$ die radiale Bahnkurve in der uns geläufigen Form:

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}.$$

Wie man sieht, hängen sämtliche Ableitungen der Polarkoordinaten ebenfalls nur vom Winkel φ ab. Um dessen zeitlichen Verlauf anzugeben, benötigen wir die Abhängigkeit des Drehimpulses von den geometrischen Parametern der Ellipse. Diese können wir mit Hilfe des Flächensatzes berechnen, indem wir ein in der Zeit dt überstrichenes Flächenelement

$$dF = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}| = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|dt = \frac{1}{2m}|\mathbf{r} \times \mathbf{p}|dt = \frac{L}{2m}dt$$

nach Ausmultiplizieren des Vektorprodukts $\mathbf{r} \times \mathbf{p} = mr\mathbf{e}_r \times \left(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi\right) = mr^2\dot{\varphi}\mathbf{e}_z$ und Division durch dt in die Flächengeschwindigkeit

$$\frac{dF}{dt} = \frac{L}{2m} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$$

umwandeln, die, wie eingangs gesagt wurde, wegen der Konstanz des Drehimpulses ebenfalls konstant sein muß. Damit nimmt die Fläche

$$F(t) = \frac{L}{2m}t = \frac{1}{2}\int_0^t |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|dt = \frac{1}{2}\int_0^\varphi r(\varphi)^2\, d\varphi$$

proportional mit der Zeit t zu. Das entspricht gerade der Aussage, wonach die vom Radiusvektor $\mathbf{r}$ in gleichen Zeiten überstrichene Fläche F konstant ist. Setzen wir die Bahngleichung der Ellipse in das Integral ein, ist die Fläche gleich

$$\frac{L}{2m}t = \frac{1}{2}p^2 \int_0^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{(1 - e\cos\varphi)^2}.$$

Dieses Integral kann mit Hilfe der Ableitung

$$d\varphi = -\frac{d\cos\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}$$

umgewandelt werden in

$$t = \frac{mp^2}{L}\int_{\cos\varphi}^{1}\frac{1}{(1-ex)^2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ferner folgt mit Hilfe der Substitutionen $f = 1/e$ und $y = f - x$ sowie der Notation

$$Y \equiv 1-x^2 = -y^2 + 2fy + 1 - f^2 = \alpha y^2 + \beta y + \gamma,$$

wobei

$$\alpha = -1, \quad \beta = 2f, \quad \gamma = 1 - f^2 = -\frac{b^2}{c^2} < 0,$$

der Ausdruck

$$t = \frac{mp^2}{Le^2}\int_{\cos\varphi}^{1}\frac{1}{(f-x)^2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{mp^2}{Le^2}\int_{f-1}^{f-\cos\varphi}\frac{1}{y^2}\frac{dy}{\sqrt{Y}}.$$

Weil die Diskriminante $\Delta = -4(1-f^2) - 4f^2 = -4$ negativ ist, entscheiden wir uns für die Lösung

$$\int\frac{dy}{y^2\sqrt{Y}} = -\frac{\sqrt{Y}}{\gamma y} - \frac{\beta}{2\gamma}\int\frac{dy}{y\sqrt{Y}} = -\frac{\sqrt{Y}}{\gamma y} - \frac{\beta}{2\gamma}\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\arcsin\frac{\beta y + 2\gamma}{y\sqrt{-\Delta}}.$$

Dieses Integral verwandeln wir wieder zurück in

$$\int\frac{dy}{y^2\sqrt{Y}} = -\frac{\sqrt{Y}}{\gamma y} - \frac{\beta}{2\gamma}\int\frac{dy}{y\sqrt{Y}} = \frac{c^2}{b^2}\frac{\sqrt{-y^2+2fy+1-f^2}}{y} + f\frac{c^3}{b^3}\arcsin\frac{acy-b^2}{c^2y},$$

so daß sich nach Einsetzen der Integrationsgrenzen der folgende Ausdruck ergibt:

$$\frac{1}{e^2}\int_{f-1}^{f-\cos\varphi}\frac{dy}{y^2\sqrt{Y}} = \frac{a^2}{b^2}\left[\frac{\sqrt{-y^2+2fy+1-f^2}}{y}\right]_{f-1}^{f-\cos\varphi} + \frac{a^3}{b^3}\left[\arcsin\frac{acy-b^2}{c^2y}\right]_{f-1}^{f-\cos\varphi}.$$

Multiplizieren wir dieses Ergebnis noch mit p^2, erhalten wir

$$\frac{p^2}{e^2}\int_{f-1}^{f-\cos\varphi}\frac{dy}{y^2\sqrt{Y}} = b^2\frac{e\sin\varphi}{1-e\cos\varphi} + ab\left(\arcsin\frac{e-\cos\varphi}{1-e\cos\varphi} + \frac{\pi}{2}\right)$$

bzw. die Umkehrfunktion

$$t(\varphi)=\frac{mp^2}{Le^2}\int_{\cos\varphi}^{1}\frac{1}{(f-x)^2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{m}{L}\left(pc\frac{\sin\varphi}{1-e\cos\varphi}+ab\left(\arcsin\frac{e-\cos\varphi}{1-e\cos\varphi}+\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

An der Stelle 2π folgt daraus die Ellipsenfläche

$$F(T)=\frac{L}{2m}t(2\pi)=\frac{1}{2}ab\left(\arcsin\frac{e-1}{1-e}+\frac{\pi}{2}\right)=\pi ab$$

sowie der Drehimpuls

$$L=m\frac{2\pi}{T}ab.$$

Im Punkt $t=T/4,$ also nach einer Viertelumlaufdauer, ist die Fläche gegeben durch

$$F(T/4)=\frac{1}{2}\frac{L}{m}\frac{T}{4}=\frac{1}{2}ab\left(\sqrt{1-e^2}\,\frac{e\sin\varphi(T/4)}{1-e\cos\varphi(T/4)}+\arcsin\frac{e-\cos\varphi(T/4)}{1-e\cos\varphi(T/4)}+\frac{\pi}{2}\right).$$

Daran sieht man, daß gelten muß:

$$e\sqrt{1-e^2}\,\frac{\sin\varphi(T/4)}{1-e\cos\varphi(T/4)}-\arcsin\frac{\cos\varphi(T/4)-e}{1-e\cos\varphi(T/4)}=0.$$

Die triviale Lösung folgt sofort für $e=0.$ Die nichttriviale Lösung für $e\neq 0$ erhalten wir, indem wir $x\equiv\cos\varphi(T/4)$ setzen und den Winkel $\varphi(T/4)$ anhand eines Newton-Verfahrens auswerten. Dies geschieht vermittels der Funktion

$$f(x)=\frac{e\sqrt{1-e^2}\sqrt{1-x^2}}{1-ex}-\arcsin\frac{x-e}{1-ex}=0.$$

Die Nullstellensuche kann der Leser zur Übung selbst vornehmen, das Ergebnis trägt zum Weiteren nichts bei.

Mit Hilfe des Drehimpulssatzes können wir die zeitlichen Ableitungen der Polarkoordinaten berechnen. Ausgehend von der Bahnkurve gilt für die erste Ableitung des radialen Abstands

$$\dot r=\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=-\frac{e\sin\varphi}{p}r^2\dot\varphi=-\frac{2\pi ab}{T}\frac{e\sin\varphi}{p}.$$

Bezeichnen wir mit $\omega_0=2\pi/T$ die zeitunabhängige Kreisfrequenz des Elektrons für $e=0,$ so lautet die Radialgeschwindigkeit

$$v_r=-\frac{\omega_0}{\sqrt{1-e^2}}\frac{ep\sin\varphi}{1-e^2},$$

wobei wir hilfsweise die Relationen

$$ab = a^2\sqrt{1-e^2} \quad \text{und} \quad a = \frac{p}{1-e^2}$$

verwendet haben. Die Radialgeschwindigkeit ist null für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ sowie für den Kreis, und sie nimmt im Punkt $\mathbf{r}_e = (c, b)$ den Wert

$$v_r(\varphi_e) = -\frac{ep\omega_0}{1-e^2}$$

an. Bei $\varphi = 90°$ ist sie maximal:

$$v_r(\pi/2) = -\frac{\omega_0}{\sqrt{1-e^2}}\frac{ep}{1-e^2}.$$

Formen wir den Drehimpulserhaltungssatz entsprechend um, erhalten wir für die Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{m}\frac{1}{r^2} = \frac{2\pi ab}{T}\frac{(1-e\cos\varphi)^2}{p^2} = \omega_0\sqrt{1-e^2}\left[\frac{1-e\cos\varphi}{1-e^2}\right]^2.$$

Diese ist minimal für $\varphi = 0$ und maximal für $\varphi = \pi,$ der Wert $\dot{\varphi}(\varphi_e)$ liegt dazwischen:

$$\dot{\varphi}(0) = \frac{\omega_0\sqrt{1-e^2}}{(1+e)^2} \equiv \omega_{\min}, \quad \dot{\varphi}(\varphi_e) = \omega_0\sqrt{1-e^2}, \quad \dot{\varphi}(\pi) = \frac{\omega_0\sqrt{1-e^2}}{(1-e)^2} \equiv \omega_{\max}.$$

Setzen wir r und $\dot{\varphi}$ in die Definition der Winkelgeschwindigkeit ein, erhalten wir die Azimutalgeschwindigkeit zu

$$v_\varphi = \omega r = r\dot{\varphi} = \frac{\omega_0 p}{\sqrt{1-e^2}}\frac{1-e\cos\varphi}{1-e^2}.$$

In den selektierten Punkten der Bahn sind die zugehörigen Extremwerte gegeben durch

$$v_\varphi(0) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-e^2}}\frac{p}{1+e}, \quad v_\varphi(\varphi_e) = \frac{\omega_0 p}{\sqrt{1-e^2}}, \quad v_\varphi(\pi) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-e^2}}\frac{p}{1-e}.$$

Zusammen mit der Radialgeschwindigkeit ergibt sich die Bahngeschwindigkeit zu

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \frac{\omega_0 p}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\sqrt{1-2e\cos\varphi + e^2}}{1-e^2}.$$

Aus dieser Gleichung entnehmen wir die maximale und minimale Geschwindigkeit in den Scheitelpunkten der Ellipse:

$$v(0) = \frac{\omega_0 p}{1-e^2}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}, \quad v(\pi) = \frac{\omega_0 p}{1-e^2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.$$

Im Punkt $\mathbf{r}_e = (c, b)$ besitzt die Bahngeschwindigkeit nur eine y-Komponente:

$$v(\varphi_e) = \frac{v_\varphi(\varphi_e)}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{\omega_0 p}{1-e^2} = v_y(\varphi_e).$$

Dabei zeigt sich, daß $v(0) = v_\varphi(0)$ und $v(\pi) = v_\varphi(\pi)$. Durch Umformen erhalten wir

$$v(0) = \frac{\omega_0\sqrt{1-e^2}}{(1+e)^2}\frac{p}{1-e} \equiv v_{\min} = \omega_{\min} r_{\max},$$

$$v(\pi) = \frac{\omega_0\sqrt{1-e^2}}{(1-e)^2}\frac{p}{1+e} \equiv v_{\max} = \omega_{\max} r_{\min}.$$

Daraus läßt sich der Drehimpuls in den Scheitelpunkten der Ellipse berechnen. Man kann wahlweise eine der beiden Formeln verwenden:

$$L = m r_{\max} v_{\min} = m r_{\min} v_{\max} \quad \text{bzw.} \quad L = m r_{\max}^2 \omega_{\min} = m r_{\min}^2 \omega_{\max}.$$

Sinngemäß resultiert auch die zweite Ableitung aus der ersten, d.h.

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{2\pi ab}{T}\frac{e\cos\varphi}{p}\dot{\varphi} = -\frac{\omega_0^2 pe\cos\varphi}{1-e^2}\left[\frac{1-e\cos\varphi}{1-e^2}\right]^2.$$

Für den Kreis ist die Radialbeschleunigung klarerweise null. Die zweite zeitliche Ableitung des Winkels folgt analog zu

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{2\pi ab}{T}\frac{2e\sin\varphi}{p}\frac{\dot{\varphi}}{r} = \omega_0^2 e\cos\varphi\left[\frac{1-e\cos\varphi}{1-e^2}\right]^3.$$

Auch hier gilt, daß die Winkelbeschleunigung für den Kreis verschwindet. Insgesamt folgt für die Radial- und Azimutalkomponente der Zentralkraft:

$$\dot{p}_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -m\left[\frac{2\pi ab}{T}\right]^2 \frac{(1-e\cos\varphi)^2}{p^3} = -\frac{m\omega_0^2 p}{1-e^2}\left[\frac{1-e\cos\varphi}{1-e^2}\right]^2$$

bzw.

$$\dot{p}_\varphi = m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = m\left[\frac{2\pi ab}{T}\right]^2 \frac{2e\sin\varphi}{p}\frac{1}{r^2} - m\left[\frac{2\pi ab}{T}\right]^2 \frac{2e\sin\varphi}{p}\frac{1}{r^2} = 0.$$

Hieraus ergeben sich in den Scheitelpunkten der Ellipse die radiale Kraftkomponenten zu

$$\dot{p}_r(0) = -\frac{m\omega_0^2 p}{1-e^2}\frac{1}{(1+e)^2}, \quad \dot{p}_r(\varphi_e) = -\frac{m\omega_0^2 p}{1-e^2}, \quad \dot{p}_r(\pi) = -\frac{m\omega_0^2 p}{1-e^2}\frac{1}{(1-e)^2},$$

während die azimutalen Komponenten identisch verschwinden. Die Radialkraft ist minimal für $\varphi = 0$ und maximal für $\varphi = \pi.$ Fügen wir die Parameter und Ableitungen der Polarkoordinaten in die bisher erhaltenen Größen ein, lauten die Ortskoordinaten

$$x = \frac{p\cos\varphi}{1 - e\cos\varphi}, \quad y = \frac{p\sin\varphi}{1 - e\cos\varphi},$$

und die Impulse sind

$$\begin{aligned} p_x &= -m\frac{2\pi ab}{T}\frac{\sin\varphi}{p} = -\frac{m\omega_0}{\sqrt{1-e^2}}\frac{p\sin\varphi}{1-e^2}, \\ p_y &= m\frac{2\pi ab}{T}\frac{\cos\varphi - e}{p} = \frac{m\omega_0}{\sqrt{1-e^2}}\frac{p(\cos\varphi - e)}{1-e^2}. \end{aligned}$$

Die Ortsunschärfen können wir somit schreiben als

$$\begin{aligned} \Delta x &= -\frac{\omega_0}{\sqrt{1-e^2}}\frac{p\sin\varphi}{1-e^2}\Delta t, \\ \Delta y &= \frac{\omega_0}{\sqrt{1-e^2}}\frac{p(\cos\varphi - e)}{1-e^2}\Delta t. \end{aligned}$$

Zur etwas aufwendigeren Berechnung der Impulsunschärfen verwenden wir die Kraftkomponenten in Polarkoordinaten, die mit den kartesischen Komponenten auf folgende Weise verknüpft sind:

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= \dot{p}_r\cos\varphi - \dot{p}_\varphi\sin\varphi, \\ \dot{p}_y &= \dot{p}_r\sin\varphi + \dot{p}_\varphi\cos\varphi. \end{aligned}$$

Nachdem die Azimutalkomponente einer Zentralkraft identisch verschwindet, resultieren daraus die einfacheren Ausdrücke

$$\begin{aligned} \Delta p_x &= \dot{p}_r\cos\varphi\cdot\Delta t = -\frac{m\omega_0^2 p\cos\varphi}{1-e^2}\left[\frac{1-e\cos\varphi}{1-e^2}\right]^2\Delta t, \\ \Delta p_y &= \dot{p}_r\sin\varphi\cdot\Delta t = -\frac{m\omega_0^2 p\sin\varphi}{1-e^2}\left[\frac{1-e\cos\varphi}{1-e^2}\right]^2\Delta t. \end{aligned}$$

Daher verbleibt im Vektorprodukt der Drehimpulserhaltung einzig der nichtverschwindende Beitrag

$$\Delta x\Delta p_y - \Delta y\Delta p_x = m\left[\frac{2\pi ab}{T}\right]^3\frac{(1-e\cos\varphi)^3}{p^4}\Delta t^2 = \frac{m\omega_0^3 p^2}{\sqrt{1-e^2}^3}\left[\frac{1-e\cos\varphi}{1-e^2}\right]^3\Delta t^2,$$

der sozusagen die Unschärfe des umlaufenden Teilchens beschreibt und wegen $\Delta t \neq 0$ im Widerspruch zur Drehimpulserhaltung steht. Das liegt aber nicht etwa daran, daß die Drehimpulserhaltung nur im System des Schwerpunkts gelten würde – denn sie gilt ebenso für ein einzelnes Teilchen –, sondern es liegt an der Relativität der Raumzeit. Der Zeitunterschied

$$\Delta t \equiv t' - t = \frac{t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - t, \qquad \lim_{v\to 0}\Delta t = 0$$

ist nämlich nur dann exakt gleich null, wenn die Geschwindigkeit $v = 0$ ist. Da sich das Elektron aber mit seiner Eigenzeit t' bewegt, ist der Drehimpulserhaltungssatz in seiner nichtrelativistischen Darstellung verletzt. Somit ist es nach den Regeln der klassischen Mechanik prinzipiell unmöglich, Ort und Impuls eines Elektrons gleichzeitig beliebig scharf zu messen, weil in einem beschleunigten Bezugssystem nach den Gesetzen der Allgemeinen Relativitätstheorie ein Zeitunterschied zu dem mit konstanter Geschwindigkeit sich bewegenden Inertialsystem des Kerns besteht. Die beobachtete Unschärfe von Ort und Impuls ist also kein Quanteneffekt, sondern ein relativistischer Effekt, und hängt nur von Energie und Drehimpuls des umlaufenden Teilchens ab. Mithin ist es die Zeit selbst, die unscharf ist, und damit auch alle davon abhängigen Größen wie Ort, Geschwindigkeit, Impuls, Drehimpuls und Energie. Besonders einfache Ausdrücke für die Drehimpulsunschärfe erhalten wir in den Scheitelpunkten der Ellipse. Befindet sich das Teilchen etwa im Punkt $\mathbf{r}_{\max} = (c+a,\, 0)$, überlebt von den 3 Beiträgen wegen

$$\begin{aligned}
&x = \frac{p}{1-e}, && y = 0,\\
&p_x = 0, && p_y = \frac{m\omega_0 p}{\sqrt{1-e^2}}\frac{1}{1+e},\\
&\Delta x = 0, && \Delta y = \frac{\omega_0 p}{\sqrt{1-e^2}}\frac{1}{1+e}\Delta t,\\
&\Delta p_x = -\frac{m\omega_0^2 p}{1-e^2}\frac{1}{(1+e)^2}\Delta t, && \Delta p_y = 0
\end{aligned}$$

nur der Term

$$\Delta y \Delta p_x = -\frac{m\omega_0^3 p^2}{\sqrt{1-e^2}^3}\frac{1}{(1+e)^3}\Delta t^2.$$

Ähnliches gilt im Punkt $\mathbf{r}_{\min} = (c-a,\, 0)$, wo sich nur das Vorzeichen ändert:

$$\begin{aligned}
&x = \frac{p}{1+e}, && y = 0,\\
&p_x = 0, && p_y = -\frac{m\omega_0 p}{\sqrt{1-e^2}}\frac{1}{1-e},\\
&\Delta x = 0, && \Delta y = -\frac{\omega_0 p}{\sqrt{1-e^2}}\frac{1}{1-e}\Delta t,\\
&\Delta p_x = \frac{m\omega_0^2 p}{1-e^2}\frac{1}{(1-e)^2}\Delta t, && \Delta p_y = 0.
\end{aligned}$$

Wieder überlebt von den 3 Beiträgen nur der Term

$$\Delta y \Delta p_x = -\frac{m\omega_0^3 p^2}{\sqrt{1-e^2}^3} \frac{1}{(1-e)^3} \Delta t^2.$$

Im Abstand der großen Halbachse vom Brennpunkt, d.h. im Punkt $\mathbf{r}_e$ mit $\varphi_e = \arccos e,$ vereinfacht sich die Drehimpulsunschärfe wegen

$$\begin{aligned}
x &= \frac{ep}{1-e^2}, & y &= \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}, \\
p_x &= -\frac{m\omega_0 p}{1-e^2}, & p_y &= 0, \\
\Delta x &= -\frac{\omega_0 p}{1-e^2} \Delta t, & \Delta y &= 0, \\
\Delta p_x &= -\frac{m\omega_0^2 ep}{1-e^2} \Delta t, & \Delta p_y &= -\frac{m\omega_0^2 \sqrt{1-e^2}\, p}{1-e^2} \Delta t
\end{aligned}$$

zu

$$\Delta x \Delta p_y = \frac{m\omega_0^3 p^2}{\sqrt{1-e^2}^3} \Delta t^2.$$

Damit liegt dieser Wert absolut gesehen zwischen der minimalen Unschärfe im Aphel und der maximalen im Perihel. In allen Punkten auf der Ellipse ist also die Orts-Impuls-Unschärfe aufgrund der Zeitunschärfe von Null verschieden und nimmt mit dem gegenseitigen Abstand der Ladungen ab. Wenn wir

$$\Delta E = m\left[\frac{2\pi ab}{T}\right]^3 \frac{(1-e\cos\varphi)^3}{p^4} \Delta t = \frac{m\omega_0^3 p^2}{\sqrt{1-e^2}^3} \left[\frac{1-e\cos\varphi}{1-e^2}\right]^3 \Delta t$$

als Energieunschärfe betrachten, folgt die Äquivalenz von Orts-Impuls- und Energie-Zeit-Unschärfe gemäß folgender Relation:

$$\Delta x \Delta p_y - \Delta y \Delta p_x = \Delta E \Delta t.$$

Interessant ist, daß die Energieunschärfe ihrerseits von der Zeitunschärfe abhängt, was auf ihre relativistische Natur hindeutet. Die minimale Energieunschärfe erhalten wir für $\varphi = 0,$ die maximale für $\varphi = \pi$:

$$\Delta E_{\min} = \frac{\Delta E_0}{(1+e)^3}, \quad \Delta E_0 = \frac{m\omega_0^3 p^2}{\sqrt{1-e^2}^3} \Delta t, \quad \Delta E_{\max} = \frac{\Delta E_0}{(1-e)^3},$$

wobei die Referenzgröße ΔE_0 durch den Umlauf auf einer äquivalenten Kreisbahn mit der Frequenz ω_0 im Abstand der großen Halbachse charakterisiert ist. Legen wir als Beispiel die Verhältnisse im Punkt $\mathbf{r}_e$ zugrunde, so gilt nach der Heisenbergschen Unschärferelation

$$\Delta x \Delta p_x = \frac{m\omega_0^3 e p^2}{\left(1-e^2\right)^2} \Delta t^2 \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Wenn das Elektron näherungsweise auf einer Kreisbahn umläuft $(e = 1/10)$, wäre das Quadrat der Zeitunschärfe auf der innersten Bahn mit der großen Halbachse $a = a_0$ gleich

$$\Delta t^2 \geq \frac{\sqrt{1-e^2}^3}{2e} \frac{m^2 a_0^4}{\hbar^2},$$

wobei wir die Drehimpulserhaltung $\hbar = m a_0^2 \omega_0 \sqrt{1-e^2}$ auf der innersten Bohrschen Bahn verwendet haben, so daß sich schließlich der Wert

$$\Delta t = \frac{\left(1-e^2\right)^{3/4}}{\sqrt{2e}} \frac{m a_0^2}{\hbar} = \frac{0{,}99^{3/4} \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot \left(5{,}29 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}\right)^2}{\sqrt{0{,}2} \cdot 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{kgm^2s^{-1}}} \approx 8{,}57 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{s}$$

ergibt. Die äquivalente Energieunschärfe beträgt

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}}{2 \cdot 8{,}57 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{s}} \approx 3{,}87 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{J}.$$

Sie wäre auf einer Kreisbahn gleich null, folglich sind Kreisbahnen in der Quantenmechanik nicht erlaubt. Auch die zugehörige Winkel- und Bahngeschwindigkeit kann berechnet werden:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\hbar}{m a_0^2} \approx \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}}{9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot \left(5{,}29 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}\right)^2} = 2{,}61 \cdot 10^{17}\,\mathrm{Hz}$$

bzw.

$$v_0 = \omega_0 a_0 = 2{,}61 \cdot 10^{17}\,\mathrm{Hz} \cdot 5{,}29 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m} = 1{,}375 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Obwohl das nur 4,5 % der Lichtgeschwindigkeit sind, ist der relativistische Effekt der Zeitunschärfe spürbar. Für höhere Orbitale nimmt dieser Effekt sehr stark zu, hier können bis zu 85 Prozent der Lichtgeschwindigkeit erreicht werden. Dementsprechend groß wird die Zeitunschärfe. Auch wenn die Zeit zunächst unscharf erscheinen mag, so ist sie dennoch nicht zufällig, sondern deterministisch bestimmt. Die statistische Deutung der Quantenmechanik als eine Theorie des Zufalls ist somit unbegründet, auch wenn die Aussage, daß Ort und Impuls eines Elektrons nicht beliebig genau gemessen werden können, zutreffen mag, wobei die Gründe hierfür eben andere sind, und das liegt daran, daß Messungen in einem relativistisch sich von uns fortbewegenden System nur nach Synchronisation der Uhren möglich sind. Das kann die Quantenmechanik aber nicht leisten. Die nichtrelativistische Quantentheorie führt ihre Messungen nämlich im Ruhesystem des Kerns durch. Außerdem beschränkt sich die Zeitunschärfe keineswegs auf das Mikroskopische, sondern sie gilt generell auch für makroskopische Systeme, also beispielsweise auch für einen unter dem Einfluß der Schwerkraft um die Sonne kreisenden Planeten. Nur ist hier die Geschwindigkeit des Planeten soweit von der Lichtgeschwindigkeit entfernt, daß der Effekt wiederum zu klein ist, um nennenswert in Erscheinung zu treten. Begibt man sich hingegen ins Ruhesystem des Elektrons, so würde in diesem der Kern um das Elektron kreisen, ähnlich wie die Sonne um die Erde, und man würde, weil die beiden Systeme relativistisch gleichwertig sind, die gleiche Zeitunschärfe feststellen. Weil Kerne im Festkörper jedoch fest an ihren Platz gebunden sind und einen höheren Strukturverbund bilden, sich also wie in einem starren Kristallgitter nicht gegeneinander bewegen, ist eine Unschärfe in einem makroskopischen System praktisch nicht feststellbar, sofern man sich nicht auf die atomare Ebene begibt. Aber selbst wenn makroskopische Systeme sich relativ zueinander bewegen, fallen bei niedrigen Geschwindigkeiten gegenüber der Lichtgeschwindigkeit Unschärfen kaum auf, obwohl sie prinzipiell vorhanden sind. Eine Unterscheidung zwischen makroskopischen und mikroskopischen Systemen ist also wegen der Universalität der Naturgesetze gar nicht zulässig. Daß man sämtliche zeitabhängigen Größen bewegter Objekte in der Quantenmechanik nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit angeben kann, liegt daran, daß man die Zeit im System des bewegten Objekts nicht messen kann, weil das Licht einige Zeit braucht, bis es uns erreicht hat. Wir blicken also stets in die Vergangenheit, und genau das begründet die Unschärfe der Gegenwart. Nun könnte man entgegenhalten, daß man die Zeit im bewegten System ja berechnen kann, aber dazu ist wiederum die Kenntnis der Geschwindigkeit nötig, die man wieder nur durch eine Zeitmessung im bewegten System ermitteln kann. Ohne eine Synchronisation der Uhren ist ein solches Unterfangen jedoch chancenlos. So kann man beispielsweise aus der Rotverschiebung der Galaxien deren Geschwindigkeit bestimmen, wie sie vor soundso vielen Lichtjahren gewesen ist, aber nicht zum gegenwärtigen Zeitpunkt. Außerdem unterliegen kosmische Objekte keiner Quantenbedingung, über die man die Unschärfe abschätzen könnte. Zwar hat die stochastische Betrachtungsweise der Quantenmechanik nach wie vor ihre Berechtigung zur näherungsweisen Beschreibung dynamischer Vorgänge, aber sie kann eben aufgrund der Allgemeinen Relativitätstheorie keine exakten Vorhersagen liefern, sonst würde man die Zukunft bereits kennen, ehe sie überhaupt stattgefunden hat.

