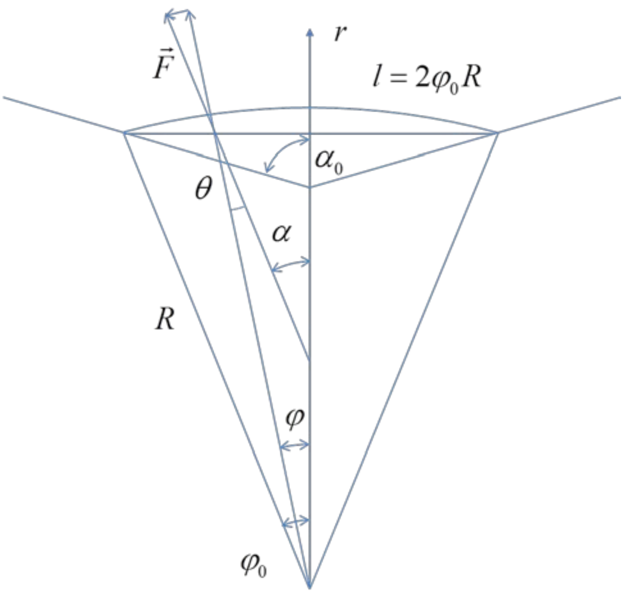
Aufgabe: Berechnen Sie die optimale Segelstellung. Unter welchen Bedingungen wird die Kraft auf ein Segel maximal?

Lösung: Betrachten wir zunächst die nachfolgende Polarkoordinatendarstellung mit der Radialkomponente r und der Azimutalkomponente φ. Der Wind falle mit der Kraft $\vec{F}$ unter dem Winkel α zur Segeloberfläche ein. Wir betrachten das Problem näherungsweise eindimensional und ersetzen daher das Flächenelement dA durch das Linienelement dl. Das Segel habe die konstante Länge l. Ferner habe das Segel die Form eines Kreisbogens mit dem Radius R.



Bogenlänge und Kreisradius hängen über den Winkel φ_0 zusammen. Der Neigungswinkel θ steht als Außenwinkel eines Dreiecks mit α und φ in folgendem Zusammenhang: $\alpha = \theta + \varphi$. Für das Linienelement gilt: $d\vec{l} = \vec{e}_r dl = \vec{e}_r R d\varphi$. Die Kraft F zerlegen wir in eine Radialkomponente F_r und in eine Azimutalkomponente F_φ, wobei $\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi$ mit $F_r = F\cos\theta$ und $F_\varphi = F\sin\theta$. Die mittlere Kraft auf das Segel $\overline{F}$ ist dann gegeben durch

$$\overline{F} = \frac{1}{l}\int \vec{F}\cdot d\vec{l} = \frac{FR}{l}\int \cos\theta d\varphi.$$

Substituieren wir in den Grenzen $[-\varphi_0, \varphi_0]$, und substituieren θ durch φ, so erhalten wir

$$\overline{F} = \frac{FR}{l}\int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \cos(\alpha-\varphi)d\varphi = \frac{FR}{l}\int_{-(\varphi_0+\alpha)}^{+(\varphi_0-\alpha)} \cos x dx = \frac{FR}{l}[\sin x]_{-(\varphi_0+\alpha)}^{\varphi_0-\alpha}.$$

Nach einigen trigonometrischen Umformungen kommen wir zu der Beziehung

$$\overline{F} = \frac{FR}{l}\left\{\sin\left(\varphi_0 - \alpha\right) + \sin\left(\varphi_0 + \alpha\right)\right\} = F\cos\alpha\,\frac{\sin\varphi_0}{\varphi_0}.$$

Die maximale Kraft auf das Segel erhalten wir für senkrecht einfallenden Wind $\alpha = 0$. Nun sind noch zwei Grenzfälle zu unterscheiden: $l = \pi R$ für die bauchige Segelstellung und R gegen Unendlich, d.h. $\varphi_0 = l/(2R)$ gegen Null für die flache. Im Falle der bauchigen Segelstellung haben wir

$$\overline{F} = \frac{2}{\pi}F,$$

im Falle der flachen $\overline{F} = F$. Das rührt daher, daß

$$\lim_{\varphi_0 \to 0} \frac{\sin\varphi_0}{\varphi_0} = 1.$$

Auf Amwindkursen gilt allerdings $\alpha = \alpha_0 > 0$ und daher $\overline{F} = F\cos\alpha_0$. Für $\cos\alpha_0 > 2/\pi$ bzw. $\alpha_0 < \arccos(2/\pi) \approx 50{,}4°$ senkrecht zur Segelfläche segelt man auf Amwindkursen tatsächlich schneller als vor dem Wind. Allerdings erreicht man aufgrund der großen Abdrift und Krängung sein Ziel nicht unbedingt früher.