**Aufgabe:** Beweisen Sie, daß von den zwei Unschärfebeiträgen der Heisenbergschen Unschärferelation stets einer kleiner null sein muß und daher die in ihr enthaltene Aussage in dieser Formulierung einen Vorzeichenfehler enthält. Berechnen Sie die Drehimpulsunschärfe neu.

**Lösung:** Angenommen, die Beiträge $\Delta r$ und $\Delta p$ in der Darstellung

$$\Delta r \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

seien beides positive Größen zweier ebenfalls positiver Meßgrößen $r$ und $p$. Da Ort und Impuls eines Teilchens fehlerbehaftet sind und sich zu einem Drehimpuls $L = rp$ multiplizieren, muß dieser dementsprechend auch mit einem Fehler $\Delta L$ behaftet sein, wenn wir ihn aus den Ausgangsgrößen berechnen würden. Im Falle eines Produkts zweier Variablen (wie hier beim Drehimpuls) berechnet sich der Meßfehler nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz aus den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial L}{\partial r} = p, \quad \frac{\partial L}{\partial p} = r.$$

Den relativen Fehler des Drehimpulses erhalten wir, wenn wir diese Ausdrücke mit ihrer jeweiligen Unschärfe multiplizieren, sodann die beiden Terme quadratisch addieren und daraus die Wurzel ziehen:

$$\Delta L = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial r}\right)^2 (\Delta r)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial p}\right)^2 (\Delta p)^2}.$$

Das führt nach Einsetzen der partiellen Ableitungen zur Unschärfe des Drehimpulses:

$$\frac{\Delta L}{L} = \sqrt{\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2}.$$

Nach Aussage der Heisenbergschen Unschärferelation kann jeweils eine der beiden Meßgrößen beliebig genau gemessen werden, während die andere dabei beliebig unscharf werden kann. Wenn also $\Delta r$ gegen Null gehen soll, folgt aus

$$\Delta r \geq \frac{\hbar}{2\Delta p},$$

daß $\Delta p$ gegen Unendlich gehen muß. Für die Impulsunschärfe gilt sinngemäß das gleiche. Im Falle, daß der Ort beliebig genau gemessen wird, ist $\Delta L = r\Delta p$, umgekehrt, wenn die Impulsunschärfe null ist, gilt $\Delta L = p\Delta r$. Sind beide Meßgrößen gleichermaßen fehlerbehaftet, läßt sich der Drehimpuls mit den zwei fehlerbereinigten Größen $r + \Delta r$ und $p + \Delta p$ wie folgt zum fehlerfreien Drehimpuls $L$ zusammensetzen:

 

$$(r+\Delta r)(p+\Delta p)=L.$$

Multiplizieren wir aus, so folgt

$$rp+r\Delta p+p\Delta r+\Delta r\Delta p=L.$$

Setzen wir nun wahlweise $\Delta r=0$ oder $\Delta p=0,$ so ist entweder

$$L=rp+r\Delta p \quad \text{oder} \quad L=rp+p\Delta r.$$

Sei nun zunächst der Ort beliebig genau gemessen, dann folgt aus vorstehender Gleichung

$$p\Delta r+\Delta r\Delta p=0$$

und aufgrund der Unschärferelation

$$\frac{\hbar}{2}\leq\Delta r\Delta p=-p\Delta r.$$

Wenn $\Delta r$ und $\Delta p$ wie angenommen positive Größen sind und der Impuls ebenso eine positive Meßgröße ist, haben wir einen Widerspruch zur Unschärferelation, womit zugleich bewiesen ist, daß stets eine der beiden Meßunschärfen negativ sein muß,

qed

Anmerkung: Die Aussage läßt sich, obwohl der Beweis bereits vollständig erbracht ist, formal auch für den Fall $\Delta L=p\Delta r$ beweisen. In diesem Fall gilt

$$r\Delta p+\Delta r\Delta p=0$$

bzw. mit Hilfe der Unschärferelation

$$\frac{\hbar}{2}\leq\Delta r\Delta p=-r\Delta p.$$

Wegen $-r\Delta p>0$ kann $\Delta p$ nur negativ sein. Aus dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2=\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2+\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2\geq 0$$

folgt ferner, daß der Drehimpuls in der klassischen Mechanik nur dann fehlerfrei gemessen werden kann, wenn sowohl Ort als auch Impuls fehlerfrei bestimmbar sind, d.h.

$$\Delta L=0 \quad \Leftrightarrow \quad (\Delta r=0)\wedge(\Delta p=0),$$

was in der Quantenmechanik jedoch nicht möglich ist. Mithin gilt stets

$$r\Delta p+p\Delta r+\Delta r\Delta p=0$$

 

bzw.

$$-r\Delta p - p\Delta r = \Delta r \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} > 0,$$

d.h.

$$r\Delta p + p\Delta r < 0.$$

Da alle im Drehimpuls vorkommenden Größen positiv definiert wurden, muß in der allgemeinen Formulierung mindestens eine, d.h. entweder $\Delta r$ oder $\Delta p$, negativ sein:

$$\frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta r \Delta p}{rp} = 0.$$

Setzen wir in der vorzeichenkorrigierten Version der Heisenbergschen Unschärferelation

$$-\Delta r \Delta p \geq \frac{\hbar}{2},$$

so folgt wegen $L \geq rp$

$$\frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta r}{r} = -\frac{\Delta r \Delta p}{rp} \geq \frac{\hbar}{2L}.$$

Quadrieren wir diese Ungleichung, erhalten wir die Abschätzung

$$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + 2\frac{\Delta r \Delta p}{rp} + \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4L^2}$$

bzw.

$$\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4L^2} - 2\frac{\Delta r \Delta p}{L} \geq \frac{\hbar^2}{4L^2} + \frac{\hbar}{L} = \frac{\hbar^2}{L^2}\left(\frac{1}{4} + \frac{L}{\hbar}\right).$$

Die absolute Drehimpulsänderung beträgt also

$$(\Delta L)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}\left(1 + \frac{4L}{\hbar}\right),$$

und der Absolutbetrag der quantenmechanischen Drehimpulsunschärfe ist schließlich

$$\Delta L \geq \frac{\hbar}{2}\sqrt{1 + \frac{4rp}{\hbar}} = \frac{1}{2}\sqrt{\hbar^2 + 4rp\hbar}.$$

 