Aufgabe: Leiten Sie einen Algorithmus für die Fusion zweier nichtrotierender Schwarzer Löcher her und lassen Sie Strahlungsverluste dabei außer acht.

Lösung: Zwei elektrisch neutrale Universen gleicher Masse $m_1 = m_2$, die beide Schwarze Löcher sind, mögen sich im Abstand r gegenseitig anziehen, ohne umeinander zu rotieren. Sei $M = m_1 + m_2$ die Gesamtmasse des Doppeluniversums. Bei einem Schwarzen Loch kann man sich die gesamte Masse auf einer Sphäre konzentriert denken. Aus der klassischen Mechanik kennen wir das Zweikörperproblem. Beide Massen ziehen sich mit entgegengesetzt gleichen Kräften an,

$$m_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \quad \text{bzw.} \quad m_2 \frac{d^2 r_2}{dt^2} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2},$$

wobei G die Gravitationskonstante ist und r_1 bzw. r_2 die Abstände vom Schwerpunkt in einem beliebigen Koordinatensystem, so daß $r = r_2 - r_1$. Ziehen wir die beiden Gleichungen voneinander ab, erhalten wir eine einfach zu lösende Differentialgleichung,

$$\frac{d^2 (r_2 - r_1)}{dt^2} = \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^2}$$

bzw.

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2},$$

welche die Bewegung eines Massenpunkts mit reduzierter Masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{M}$$

auf einer klassischen Umlaufbahn beschreibt. Trennen wir die Variablen,

$$\mu \frac{d\dot{r}}{dt} = -\frac{GM\mu}{r^2} = GM\mu \frac{d}{dr}\frac{1}{r},$$

erhalten wir einen integrierbaren Ausdruck,

$$\mu \dot{r} d\dot{r} = GM\mu d\frac{1}{r},$$

der uns das folgende unbestimmte Integral liefert,

$$\mu \int \dot{r} d\dot{r} = GM\mu \int d\frac{1}{r} + E,$$

mit einer Integrationskonstanten für die Energie E. Unsere Integration ergibt folgende Lösung,

$$\frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 = \frac{GM\mu}{r} + E,$$

in der wir unschwer den Energieerhaltungssatz erkennen, der sich aus einem kinetischen und einem potentiellen Anteil zusammensetzt.

Copyright © 2025, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

Für zwei sich in Richtung der Kraft aufeinander zubewegende Massenpunkte, die nicht um einen gemeinsamen Schwerpunkt kreisen, gilt die folgende Bewegungsgleichung ohne Winkelgeschwindigkeit und Drehimpuls,

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 - \frac{GM\mu}{r} = -\frac{1}{2}\mu c^2 \left(\frac{2GM}{rc^2} - \frac{v^2}{c^2} \right),$$

wobei $v = \dot{r}$ eine reine Radialgeschwindigkeit ist. Der Energiesatz kennt nur zwei Grenzfälle. Beim Grenzwert $r \to \infty$ verschwindet die potentielle Energie, folglich muß die Energie gleich der kinetischen Energie sein,

$$E = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2.$$

Auf dem Schwarzschildradius hingegen gilt

$$E = \frac{1}{2}\mu v_S^2 - \frac{GM\mu}{R_S}.$$

Da die Energie erhalten bleibt, folgt

$$\frac{1}{2}\mu v_S^2 - \frac{GM\mu}{R_S} = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2 \quad \text{bzw.} \quad v_S^2 - v_\infty^2 = \frac{2GM}{R_S}.$$

Da die Ungleichung

$$v_S^2 \left(1 - \frac{v_\infty^2}{v_S^2} \right) = \frac{2GM}{R_S} \le v_S^2$$

nicht negativ werden kann, gilt das Gleichheitszeichen nur, wenn $v_\infty^2 = 0.$ Daraus folgt, daß die Geschwindigkeit auf dem Schwarzschildradius gleich der Lichtgeschwindigkeit sein muß:

$$v_S^2 = \frac{2GM}{R_S} = c^2.$$

Somit ist der Schwarzschildradius für nichtrotierende Schwarze Löcher durch folgende Formel gegeben:

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}.$$

Damit ergibt sich eine verschwindende Energie,

$$E = \frac{1}{2}\mu c^2 - \frac{GM\mu}{R_S} = 0,$$

die im allgemeinen Fall gilt jedoch durch

$$E = \frac{1}{2} r \left(\mu \frac{v^2}{r} - \frac{2GM\mu}{r^2} \right) = 0$$

gegeben ist, womit sich Gravitationskraft und Zentrifugalkraft im Falle einer Parabelbahn auch gänzlich ohne Rotation zu jedem Zeitpunkt die Waage halten:

Copyright © 2025, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

$$\mu\frac{v^2}{r}=\frac{2GM\mu}{r^2}.$$

Damit ist die Geschwindigkeit im Unendlichen gleich null und auf dem Schwarzschildradius gleich der Lichtgeschwindigkeit. Zwischen diesen beiden Grenzwerten gilt

$$v^2=\frac{2GM}{r},$$

womit der Energiesatz universell erfüllt ist. Ein Schwarzes Loch stellt also aufgrund seiner Krümmung ein beschleunigtes Bezugssystem dar, selbst wenn es sich nicht dreht. Man muß in einem solchen Fall die Frage nicht mehr aufkommen lassen, was das Universum expandieren läßt und warum es nicht in sich zusammenstürzt.

Für das gesamte Universum gelte nun ein konstanter Abstand der beiden sich anziehenden Schwarzen Löcher, d.h. $r=R_S$ und $\dot{r}=0,$ da sich Massen nicht gegenseitig durchdringen können. Ein solches System besitzt eine negative Bahnenergie,

$$E=-\frac{GM\mu}{R_S}=-\frac{1}{2}\frac{2GM\mu}{R_S},$$

die eine energetisch gebundene Kreisbahn ergibt,

$$E=-\frac{1}{2}\mu c^2,$$

obwohl wir uns strenggenommen „im freien Fall" längs einer Geraden befinden. Wollen wir jedoch mit zwei Massen mit variablem Abstand *r* befassen, müssen wir die Bahngleichung lösen. Die Rechnung führt zu folgender Radialgleichung,

$$\frac{\dot{r}^2}{c^2}=\frac{R_S}{r}+\frac{2E}{\mu c^2}$$

bzw.

$$\dot{r}=c\sqrt{\frac{R_S}{r}+\frac{2E}{\mu c^2}},$$

wobei R_S jetzt nicht der Schwarzschildradius des gesamten Universums ist, sondern der eines beliebigen Schwarzen Lochs. Trennen wir die Variablen, ergibt sich das folgende Zeitdifferential,

$$cdt=\frac{dr}{\sqrt{\frac{R_S}{r}+\frac{2E}{\mu c^2}}},$$

welches wir mittels der Substitutionen

$$r=\frac{1}{u}\quad\text{und}\quad dr=-\frac{1}{u^2}du$$

in ein leichter zu lösendes Integral umwandeln können. Durch Integration von

Copyright © 2025, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

$$cdt = -\frac{du}{u^2\sqrt{R_S u + \frac{2E}{\mu c^2}}}$$

erhalten wir

$$ct = -\int \frac{du}{u^2\sqrt{R_S u + \frac{2E}{\mu c^2}}}.$$

Mit dem unbestimmten Integral[1]

$$-\int \frac{du}{u^2\sqrt{au+b}} = \frac{1}{bu}\sqrt{au+b} + \frac{a}{b}\frac{1}{\sqrt{-b}}\arctan\sqrt{-\frac{au+b}{b}} + C,$$

welches sich mit der trigonometrischen Beziehung

$$\arctan\sqrt{-\frac{au+b}{b}} = \arcsin\sqrt{\frac{au+b}{au}}$$

umformen läßt in

$$-\int \frac{du}{u^2\sqrt{au+b}} = \frac{1}{bu}\sqrt{au+b} + \frac{a}{b}\frac{1}{\sqrt{-b}}\arcsin\sqrt{\frac{au+b}{au}} + C,$$

ergibt die Rücktransformation mittels $u = 1/r$ folgenden Ausdruck:

$$ct = \frac{r}{b}\sqrt{\frac{a}{r}+b} + \frac{a}{b}\frac{1}{\sqrt{-b}}\arcsin\sqrt{\frac{r}{a}\left(\frac{a}{r}+b\right)} + C.$$

Mit den Parametern

$$a = R_S \quad \text{und} \quad b = \frac{2E}{\mu c^2} < 0$$

erhalten wir eine nicht explizit nach r auflösbare Gleichung,

$$ct = r\frac{\mu c^2}{2E}\sqrt{\frac{R_S}{r} + \frac{2E}{\mu c^2}} + R_S\frac{\mu c^2}{2E}\sqrt{-\frac{\mu c^2}{2E}}\arcsin\sqrt{\frac{r}{R_S}\left(\frac{R_S}{r} + \frac{2E}{\mu c^2}\right)} + C.$$

Unsere Nebenbedingung für das Universum war, daß der Abstand der beiden Massen gleich dem Schwarzschildradius sein muß, d.h. $r = R_S$, was einer energetisch gebundenen Kreisbahn mit negativer Energie entspricht:

$$E = -\frac{1}{2}\mu c^2.$$

Dann und nur dann gilt

[1] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, 23.Auflage, 1987, S. 42, Integral Nr. 129

Copyright © 2025, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

$$-ct = r\sqrt{\frac{R_S}{r}-1} + R_S \arcsin\sqrt{\frac{r}{R_S}\left(\frac{R_S}{r}-1\right)} + C.$$

Mit $r = R_S$ ergibt sich für die Konstante der Wert $C = -cT_S$ und damit eine implizite Gleichung für *t* und *r*:

$$c\left(T_S - t\right) = r\sqrt{\frac{R_S}{r}-1} + R_S \arcsin\sqrt{\frac{r}{R_S}\left(\frac{R_S}{r}-1\right)}.$$

Damit gilt auch $t = T_S$, d.h. die Zeit auf dem Schwarzschildradius des Universums ist konstant. Für Radien kleiner als der Schwarzschildradius formen wir wie folgt um:

$$\frac{c\left(T_S - t\right)}{R_S} = \sqrt{\frac{r}{R_S} - \frac{r^2}{R_S^2}} + \arcsin\sqrt{1 - \frac{r}{R_S}}.$$

Bringen wir den Wurzelterm auf die andere Seite und bilden von beiden Seiten die Umkehrfunktion, ergibt sich

$$\sin\left[\frac{c\left(T_S - t\right)}{R_S} - \sqrt{\frac{r}{R_S} - \frac{r^2}{R_S^2}}\right] = \sqrt{1 - \frac{r}{R_S}}.$$

Quadrieren wir diese Gleichung,

$$\sin^2\left[\frac{c\left(T_S - t\right)}{R_S} - \sqrt{\frac{r}{R_S} - \frac{r^2}{R_S^2}}\right] = 1 - \frac{r}{R_S},$$

können wir den Sinus in einen Kosinus umwandeln,

$$r = R_S \cos^2\left[1 - \frac{ct}{R_S} - \sqrt{\frac{r}{R_S}\left(1 - \frac{r}{R_S}\right)}\right].$$

Alternativ können wir den Radius auch vom Schwarzschildradius subtrahieren:

$$R_S - r = R_S \sin^2\left[1 - \frac{ct}{R_S} - \sqrt{\frac{r}{R_S}\left(1 - \frac{r}{R_S}\right)}\right].$$

Addieren wir die beiden Ausdrücke und multiplizieren beide Seiten mit dem Schwarzschildradius R_S, erhalten wir eine Kreisgleichung mit dem Phasenwinkel

$$\varphi\left(t, r\right) = 1 - \frac{ct}{R_S} - \sqrt{\frac{r}{R_S}\left(1 - \frac{r}{R_S}\right)},$$

die sich in Komponentenschreibweise wie folgt darstellt:

$$x_S^2 + y_S^2 = R_S^2 \cos^2\varphi + R_S^2 \sin^2\varphi = R_S^2.$$

Da wir die Phase beliebig wählen können, setzen wir sie gleich null. Dann ist

Copyright © 2025, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

$$1-\frac{ct}{R_S}=\sqrt{\frac{r}{R_S}\left(1-\frac{r}{R_S}\right)}$$

bzw.

$$\frac{r}{R_S}-\frac{r^2}{R_S^2}=\frac{\left(R_S-ct\right)^2}{R_S^2}.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung der Form

$$r^2-R_S r+\left(R_S-ct\right)^2=0$$

mit den Lösungen

$$r_{1,2}=\frac{R_S}{2}\pm\sqrt{\frac{R_S^2}{4}-\left(R_S-ct\right)^2}.$$

Da die Wurzel nicht negativ werden darf, gibt es nur reelle Lösungen im Intervall

$$\frac{R_S}{2}\le ct\le R_S.$$

Die Zeit $t=0$ kann folglich nur für ein Schwarzes Loch mit verschwindendem Schwarzschildradius existieren, aber so etwas gibt es nicht. Es kann also nicht sein, daß sich das Universum auf null zusammenzieht. Da sieht es für den Urknall schlecht aus. Man kann diese Situation nur dadurch retten, daß man ein zweites Universum einführt, so daß beide Masse miteinander austauschen können und sich wie harmonischer Oszillator verhalten, wobei die rücktreibende Kraft die Gravitationskraft ist. Seien also

$$r_1=R_S\cos^2\varphi \quad \text{und} \quad r_2=R_S-r_1=R_S\sin^2\varphi$$

die Auslenkungen der beiden oszillierenden Universen, dann ergibt die Überlagerung

$$r_1+r_2=\frac{1}{2}R_S\left(1+\cos 2\varphi\right)+\frac{R_S}{2}\left(1-\cos 2\varphi\right)=R_S$$

das gewünschte Doppeluniversum. Durch eine Phasenverschiebung von $\pi/2$ kann der Kosinus jederzeit in einen Sinus umgewandelt werden. Für die beiden oszillierenden Schwarzen Löcher gelten dann im gebundenen Zustand ebenfalls Kreisgleichungen. Mit den Definitionen der einzelnen Schwarzschildradien

$$c^2=\frac{2GM}{R_S}=\frac{2Gm_1}{R_1}=\frac{2Gm_2}{R_2}$$

können wir beide zu einem einzigen Schwarzen Loch fusionieren:

$$\frac{2GM}{c^2}=\frac{2G\left(m_1+m_2\right)}{c^2}=R_1+R_2=R_S.$$

Strahlungsverluste brauchen wir in diesem einfachen Modell ohne Rotation nicht berücksichtigen.

Copyright © 2025, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

Da für den Grenzwert einer elliptischen Bahn, eine Parabel mit einer Energie von $E = 0$, die Bahngleichung

$$\dot{r}^2 = \frac{R_S}{r} c^2$$

gilt, was durch Einsetzen der Energie aus der allgemeinen Gleichung

$$\frac{\dot{r}^2}{c^2} = \frac{R_S}{r} + \frac{2E}{\mu c^2}$$

folgt, kann r nicht kleiner als der Schwarzschildradius werden, da sonst die Lichtgeschwindigkeit überschritten wird, und größere Radien führen wie gesagt zu imaginären Wurzeln. Die Bewegungsgleichung ist demnach nur für $r = R_S$ lösbar, und damit verbleibt nur die Möglichkeit $\dot{r} = c$ bzw. $r = ct.$ Mithin ist

$$\frac{ct}{r} = \frac{cT_S}{R_S} = 1.$$

Damit ergibt sich im Inneren eines Schwarzes Lochs folgender Zusammenhang zwischen Raum und Zeit:

$$\frac{ct}{r} = 1 \quad \text{bzw.} \quad r = ct.$$

Der Schwarzschildradius ist somit eine Fläche der Gleichzeitigkeit, denn es gilt

$$t = \frac{r}{c} = \frac{R_S}{c} = T_S.$$

Das bedeutet, daß die gesamte Masse eines Schwarzen Lochs auf dem Schwarzschildradius konzentriert ist, denn ein Raum mit $r < R_S$ existiert nicht. Ein Schwarzes Loch, das sich über das gesamte Universum erstreckt, ist somit ein räumlich konstantes Gebilde, in dem es keine variable Zeit gibt. Es erwacht erst zum Leben, wenn wir seinen Radius und damit seine Ausdehnung vergrößern oder verkleinern und dadurch die Zeit in Gang bringen oder rückwärts laufenlassen. Die Zeit wird damit zu einer Schleife, die bei $t = 0$ endet und beginnt. Setzen wir

$$R(t) = R(0) + \Delta r = cT(0) + c\Delta t = cT(r),$$

erkennt man, daß die Zeit tatsächlich vom Radius eines Schwarzen Lochs und damit von seiner Masse abhängt, da die Masse proportional zu seiner Oberfläche ist. Schwarze Löcher können also mit der Zeit wachsen, nur muß die zusätzliche oder verlorene Masse irgendwoher kommen oder irgendwohin abwandern. Das ist nur möglich, wenn zwei Schwarze Löcher untereinander Masse austauschen, von denen das eine größer und das andere kleiner wird, damit ihre Masse in Summe gleichbleiben kann. Seien also R_1 und R_2 die variablen Schwarzschildradien von zwei in Wechselwirkung stehenden Schwarzen Löchern, die sich gerade berühren und zusammen den Schwarzschildradius R_S ergeben, d.h. $R_1 + R_2 = R_S$, dann kann sich abwechselnd jedes der beiden Schwarzen Löcher bis zum maximalen Radius ausdehnen, während das andere auf null zusammenschrumpft. Wenn beispielsweise R_1 singulär wird, erkennt man, daß R_2 maximal werden muß, und umgekehrt. Die Zeiten verhalten sich demnach wie die Radien. Da

Copyright © 2025, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

$ct_1 + ct_2 = cT_S$, ist $t_2 = T_S - t_1$, und damit wird die Zeit im Antiuniversum kürzer, sie läuft rückwärts. Das Ganze wiederholt sich periodisch, da die Gravitation die treibende Kraft des harmonischen Oszillators ist. Wenn $t_1 = T_S$ ist, ist $t_2 = 0$ und die Welt beginnt von neuem. Die Masse wechselt also vollständig von einem Universum ins andere. Somit ist das Weltall nur erklärlich, wenn es aus mindestens zwei Schwarzen Löchern besteht, die untereinander Masse austauschen, was zu einer Änderung der Einzelradien führt. Die Radien können jedoch nicht miteinander überlappen, sondern müssen einen konstanten Abstand zueinander wahren, damit ein kontinuierlicher Masseausgleich im Berührungspunkt erfolgen kann. Während also das eine Schwarze Loch an Masse verliert, nimmt das andere dabei zu. Am Ende dieses Vorgangs steht ein einziges Schwarzes Loch, während das andere ausgelöscht ist. Zwar kann auch ein sich nicht ausdehnendes Universum einen Drehimpuls mit zeitunabhängiger Winkelgeschwindigkeit und festem Radius besitzen, allerdings kann ein solches Modell die radiale Ausbreitung der Galaxien nicht erklären.

Eine Welt kann also nur eine Zeit hervorbringen, wenn von extern Masse zugeführt wird, und dieser Massezuwachs muß kontinuierlich erfolgen, sonst würde die Zeit plötzlich stillstehen. Alles, was in ein Schwarzes Loch hineinfällt, vergrößert seine Masse und damit sein Volumen und seine Ausdehnung. Das bedeutet aber nicht, daß sich diese Welt von innen her ausgedehnt haben muß, da sich gemäß unserer Gleichung bei $r = 0$ eine Singularität befindet, d.h. ein Nichts. Es gibt also keinen logischen Grund für eine Ausdehnung des Alls aus dem Nichts heraus, daher kann die Massezufuhr nur von außen erfolgen, es sei denn, man nimmt an, daß die Masse aus dem Rand der Punktsingularität herausquillt, was aber aufgrund der Konstanz der Energie den Schwarzschildradius des Universums verringern würde, womit alle Galaxien auf uns zufliegen würden, anstatt sich von uns zu entfernen. Das führt uns zu der Überlegung, daß diese externe Energie nur von einem weiteren Schwarzen Loch herrühren kann, welches mit unserem Universum in ständigem Masseaustausch steht, wenngleich es nicht „auf einen Schlag“ in unser Universum eindringen kann. Der Grund hierfür ist die Erhaltung des Drehimpulses, den wir bei nichtrotierenden Schwarzen Löchern jedoch ausklammern müssen.

Die Masse eines Schwarzen Lochs kann sich demnach nur ändern, wenn sich der Schwarzschildradius ändert, etwa durch Massezuwachs oder Masseverlust. Fügen wir

$$R_1 = r \quad \text{bzw.} \quad T_1 = t$$

in die Gleichung ein, ist sie ebenfalls erfüllt,

$$cT_1 - ct = r\sqrt{\frac{R_1}{r} - 1} + R_1 \arcsin\sqrt{\frac{r}{R_1}\left(\frac{R_1}{r} - 1\right)} = 0,$$

allerdings mit einem kleineren Schwarzschildradius $R_1 \in [0, R_S]$.

Nachfolgend leiten wir noch die fundamentalen Größen der Fusion Schwarzer Löcher her. Die fundamentalste Größe, die bei der Fusion erhalten bleibt, ist die Masse:

$$m_1 + m_2 = M.$$

Ferner haben wir gezeigt, daß die Masse eines Schwarzen Lochs proportional zu seinem Radius ist. Seien wieder R_1 und R_2 die Schwarzschildradien zweier zu fusionierender Schwarzer Löcher. Dann gilt für die entsprechenden Massen die Beziehung

Copyright © 2025, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

$$m_1 = \frac{c^2}{2G} R_1, \quad m_2 = \frac{c^2}{2G} R_2, \quad \frac{c^2}{2G} R_S \,.$$

Addieren wir diese, wie die Massenerhaltung es gebietet, folgt daraus

$$\frac{c^2}{2G} R_1 + \frac{c^2}{2G} R_2 = \frac{c^2}{2G} R_S$$

und nach Kürzen des konstanten Vorfaktors die Erkenntnis, daß sich die Radien wie die Massen addieren, ohne daß sie sich gegenseitig überschneiden können:

$$R_1 + R_2 = R_S \,.$$

Durch Quadrieren dieser Gleichung,

$$\left(R_1 + R_2\right)^2 = R_1^2 + 2R_1R_1 + R_2^2 = R_S^2 \,,$$

und Multiplikation beider Seiten mit 4π,

$$4\pi R_1^2 + 8\pi R_1 R_1 + 4\pi R_2^2 = 4\pi R_S^2 \,,$$

sehen wir, daß sich die Oberflächen nicht einfach addieren, sondern ein gemischter Term hinzukommt, damit die Flächenbilanz stimmt. Mit den Definitionen der jeweiligen Oberflächen unserer Schwarzen Löcher,

$$S_1 = 4\pi R_1^2, \quad S_2 = 4\pi R_2^2, \quad S = 4\pi R_S^2 \,,$$

sowie der Definition des Wurzelprodukts der beiden Flächen,

$$\sqrt{S_1 S_2} = 4\pi R_1 R_2 \,,$$

summieren sich die Komponenten wie folgt:

$$S_1 + 2\sqrt{S_1 S_2} + S_2 = 4\pi \left(R_1^2 + 2R_1R_2 + R_2^2\right) = 4\pi \left(R_1 + R_2\right)^2 = 4\pi R_S^2 = S.$$

Mithin ist die Summe der beiden Flächen um den gemischten Term kleiner als die Gesamtfläche:

$$S_1 + S_2 = S - 2\sqrt{S_1 S_2} \,.$$

Führen wir Oberflächendichten ein,

$$\sigma_1 = \frac{m_1}{4\pi R_1^2}, \quad \sigma_2 = \frac{m_2}{4\pi R_1^2}, \quad \sigma = \frac{M}{4\pi R_S^2} \,,$$

und ersetzen die Massen durch ihre Schwarzschildradien, sehen wir, daß sich die Dichten umgekehrt proportional zu den Radien verhalten,

$$\sigma_1 = \frac{c^2}{8\pi G} \frac{1}{R_1}, \quad \sigma_2 = \frac{c^2}{8\pi G} \frac{1}{R_2}, \quad \sigma = \frac{c^2}{8\pi G} \frac{1}{R_S} \,,$$

und daß die Produkte

$$\sigma R_S = \sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2 = \frac{c^2}{8\pi G}$$

Copyright © 2025, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

jeweils konstant sind. Die Dichten addieren sich also nicht zu einer Gesamtdichte, sondern wie

$$\sigma_1+\sigma_2=\frac{c^2}{8\pi G}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=\frac{c^2}{8\pi G}\frac{c^2}{2G}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)=\frac{c^2}{8\pi G}\frac{c^2}{2G}\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}=\frac{c^2}{8\pi G}\frac{1}{R_S}\frac{M}{\mu}.$$

Für die Gesamtdichte folgt daraus

$$\sigma=\frac{\mu(\sigma_1+\sigma_2)}{M}=\frac{m_1 m_2}{M^2}(\sigma_1+\sigma_2).$$

Das bedeutet, daß wenn eine der beiden Massen null wird, auch die Gesamtdichte verschwindet. Im vollständig ausgedehnten Universum wäre demnach keine Massendichte mehr vorhanden. Wohin sollte es sich dann noch ausdehnen? Nun kann man allerdings Masse und Massendichte nicht unabhängig voneinander betrachten. Setzen wir nämlich die Einzeldichten

$$\sigma_1=\frac{M}{4\pi R_S}\frac{1}{R_1}\quad\text{und}\quad\sigma_2=\frac{M}{4\pi R_S}\frac{1}{R_2}$$

in die obige Gleichung ein, läßt sich die Gesamtdichte folgendermaßen berechnen:

$$\sigma=\frac{\mu(\sigma_1+\sigma_2)}{M}=\frac{1}{4\pi R_S}\left(\frac{m_1}{R_1}m_2+\frac{m_2}{R_2}m_1\right)\frac{1}{M}=\frac{1}{4\pi R_S}\frac{c^2}{2GM}(m_2+m_1)=\frac{M}{4\pi R_S^2}.$$

Daraus würde bei einem unendlichen Universum ein unendlicher Schwarzschildradius folgen. Weil sich aber die Massen wie die Radien verhalten und der Quotient der beiden endlich ist, resultiert tatsächlich ein endlicher Wert, der die Physik wieder in Ordnung bringt. Das Weltall hat zwar ein niedrige, jedoch keine verschwindende Dichte auf dem Schwarzschildradius, genauso wie die Massen nicht wirklich null werden können, sondern immer noch ein Restmasse von der Größenordnung der Planckmasse verbleiben muß und auch die Singularität nicht kleiner werden kann als die Plancklänge. Was man aber erkennt ist, daß eine Punktsingularität, d.h. ein Schwarzes Loch mit einem nahezu punktförmigen Radius, eine extreme Oberflächendichte besitzt, auch wenn die Masse selbst sehr klein ist. Die Oberflächendichte ist somit auch ein Maß für die Krümmung des Raums.

Der Vollständigkeit halber berechnen wir nun noch den Schwerpunkt, entweder direkt mit Hilfe der Schwarzschildradien,

$$\overline{r}=\frac{m_1 r_1+m_2 r_2}{m_1+m_2}=r_1+\frac{m_2}{m_1+m_2}(r_2-r_1)=\frac{c^2}{2G}\frac{2G}{c^2}\frac{R_2}{R_1+R_2}r=\frac{R_2}{R_S}R_S=R_2,$$

wobei wir den Ursprung des Koordinatensystems in den Punkt $r_1=0$ gelegt haben, damit der Schwerpunkt durch den Abstand $r=r_2-r_1=R_S$ ausgedrückt werden kann, oder indem wir die Massen durch ihre Dichten ausdrücken,

$$m_1=4\pi\sigma_1 R_1^2,\quad m_2=4\pi\sigma_2 R_2^2,\quad M=4\pi\sigma R_S^2.$$

Damit erhält man gemäß obiger Definition

$$\overline{r}=\frac{m_2 r}{m_1+m_2}=\frac{4\pi\sigma_2 R_2^2}{4\pi\sigma_1 R_1^2+4\pi\sigma_2 R_2^2}R_S=\frac{\sigma_2 R_2^2}{\sigma_1 R_1^2+\sigma_2 R_2^2}R_S$$

wegen $\sigma_1 R_1=\sigma_2 R_2$ dasselbe Ergebnis:

Copyright © 2025, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

$$\bar{r} = \frac{(\sigma_2 R_2) R_2}{(\sigma_1 R_1) R_1 + (\sigma_2 R_2) R_2} R_S = \frac{(\sigma_2 R_2) R_2}{(\sigma_2 R_2) R_1 + (\sigma_2 R_2) R_2} R_S = \frac{R_2}{R_1 + R_2} R_S = R_2.$$

Wenn wir den Ursprung unseres Systems aus zwei Schwarzen Löchern in den Mittelpunkt von einem dieser beiden Schwarzen Löcher legen, dann liegt der Schwerpunkt stets im Abstand des Radius des anderen Schwarzen Lochs. Dieser Abstand reicht vom maximalen Schwarzschildradius mit Masse M bis zum Abstand null bei verschwindender Masse des „Satelliten.“ Bei statischen Schwarzen Löchern können wir Massenverluste durch Gravitationswellen vernachlässigen, da sie nicht rotieren und damit auch nicht abstrahlen.

In der nachfolgenden Tabelle sind 7 ausgewählte Kombinationen durchgerechnet und einige in den beigefügten Abbildungen graphisch veranschaulicht.

R_1	R_2	S_1	S_2	$2\sqrt{S_1 S_2}$	S	$\bar{r}$
0	R_S	0	$4\pi R_S^2$	0	$4\pi R_S^2$	R_S
$\frac{1}{8}R_S$	$\frac{7}{8}R_S$	$\frac{1}{16}\pi R_S^2$	$\frac{49}{16}\pi R_S^2$	$\frac{7}{8}\pi R_S^2$	$4\pi R_S^2$	$\frac{7}{8}R_S$
$\frac{1}{4}R_S$	$\frac{3}{4}R_S$	$\frac{1}{4}\pi R_S^2$	$\frac{9}{4}\pi R_S^2$	$\frac{6}{4}\pi R_S^2$	$4\pi R_S^2$	$\frac{3}{4}R_S$
$\frac{1}{2}R_S$	$\frac{1}{2}R_S$	πR_S^2	πR_S^2	$2\pi R_S^2$	$4\pi R_S^2$	$\frac{1}{2}R_S$
$\frac{3}{4}R_S$	$\frac{1}{4}R_S$	$\frac{9}{4}\pi R_S^2$	$\frac{1}{4}\pi R_S^2$	$\frac{6}{4}\pi R_S^2$	$4\pi R_S^2$	$\frac{1}{4}R_S$
$\frac{7}{8}R_S$	$\frac{1}{8}R_S$	$\frac{49}{16}\pi R_S^2$	$\frac{1}{16}\pi R_S^2$	$\frac{7}{8}\pi R_S^2$	$4\pi R_S^2$	$\frac{1}{8}R_S$
R_S	0	$4\pi R_S^2$	0	0	$4\pi R_S^2$	0

Tabelle 1. Einige ausgesuchte Beispiele für die Fusion zweier Schwarzer Löcher mit unterschiedlichen Radien

Unser Universum kann also kein statisches Schwarzes Loch ohne Drehimpuls sein, da die Zeit und damit die Ausdehnung des Alls nur durch einen Massezuwachs begründet werden können. Wie wir gesehen haben, sind im Minimum zwei Schwarze Löcher erforderlich, um die Periodizität des Alls zu gewährleisten, denn sobald sich einer der Radien dem Schwarzschildradius nähert, muß der andere vollständig abgenommen haben und in der Zeit zurückgelaufen sein, damit eine neue Periode des harmonischen Oszillators beginnen kann.

Wir wissen, daß Massen sich anziehen, woher aber die physikalischen Kräfte und Grundgrößen stammen, das wissen wir nicht. Wir wissen nicht einmal, warum es Fernwirkungen gibt, die weit über den Bereich des Ereignishorizonts hinauswirken. Das Erstaunliche ist, daß die meisten Kräfte in der Natur einen polaren Ursprung haben, verstehen aber nicht, warum die Gravitation kräftemäßig ein Monopol ist. Erst wenn dieser andere Pol aufgefunden ist, werden wir aufgrund der allgegenwärtigen Symmetrie im All verstehen, daß es die Welt eigentlich nicht gibt, und daß, wie Hegel es ausgedrückt hat, Universum und Antiuniversum sich im Nichts aufheben.

Copyright © 2025, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

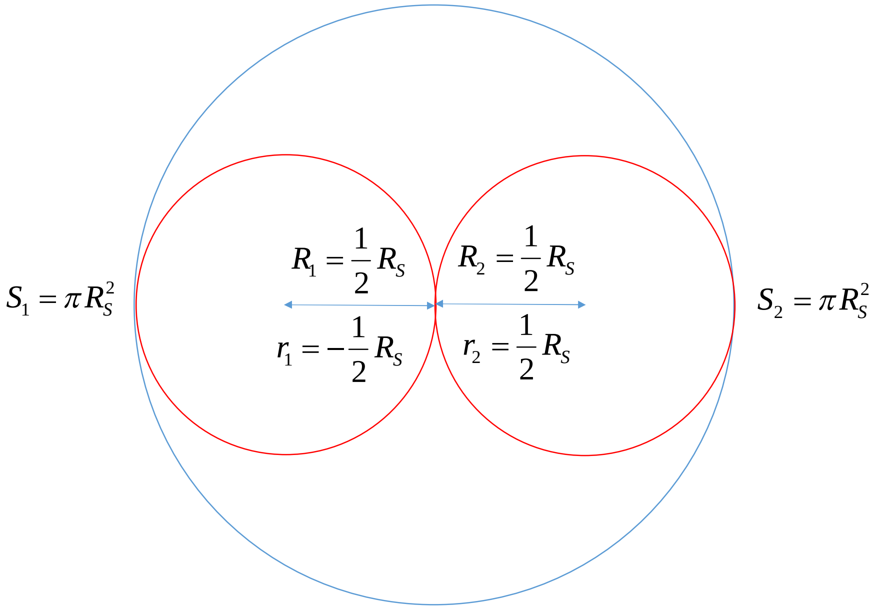

Abbildung 1. Beispiel für die Fusion zweier Schwarzer Löcher mit gleichen Schwarzschildradien

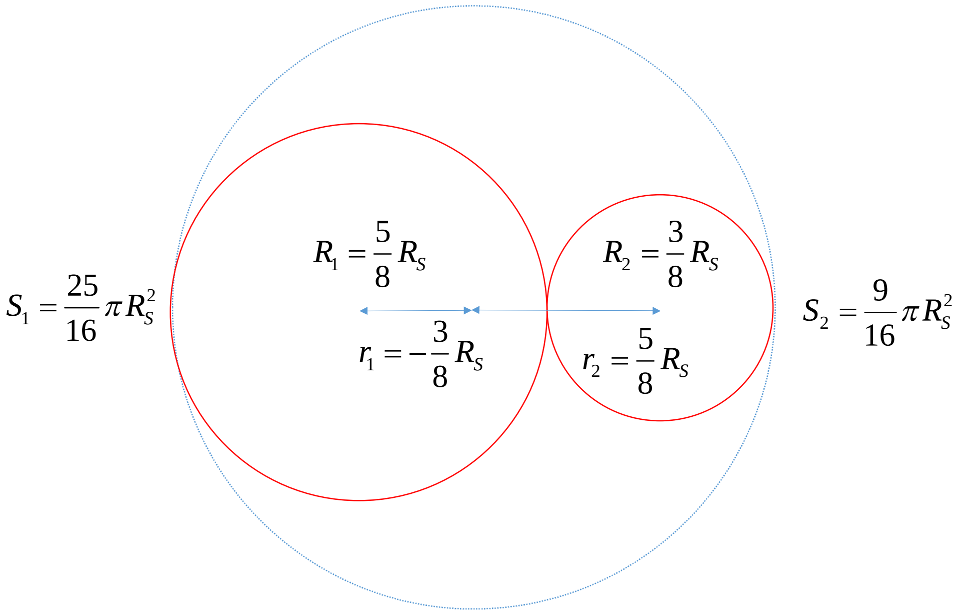

Abbildung 2. Beispiel für die Fusion zweier Schwarzer Löcher mit Radien von 5/8 und 3/8 des Schwarzschildradius

Copyright © 2025, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

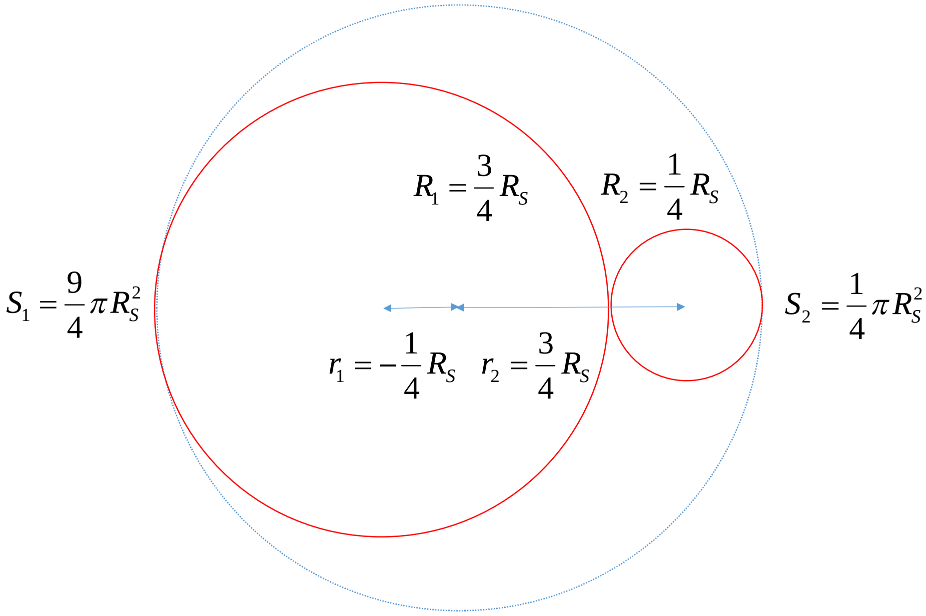

Abbildung 3. Beispiel für die Fusion zweier Schwarzer Löcher mit Radien von 3/4 und 1/4 des Schwarzschildradius

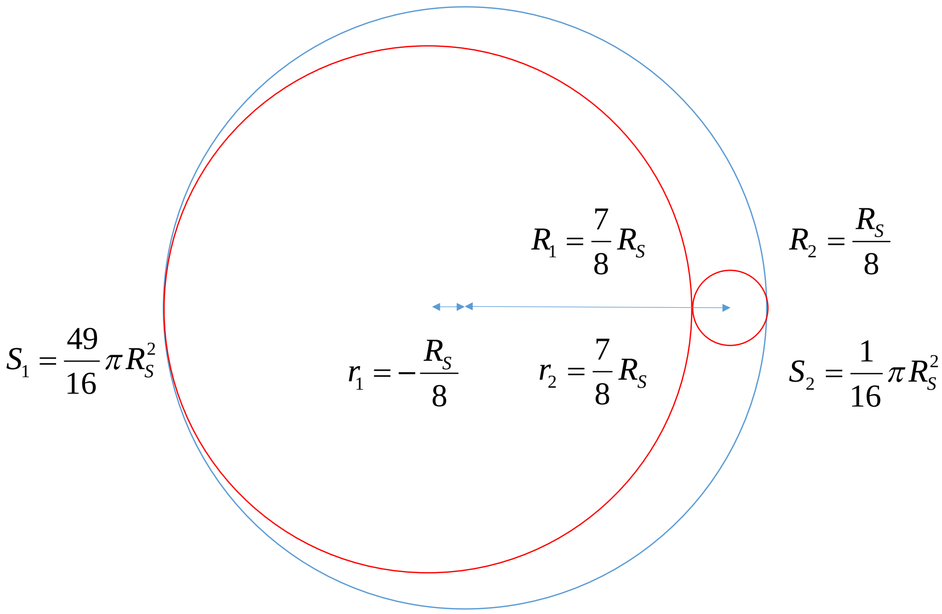

Abbildung 4. Beispiel für die Fusion zweier Schwarzer Löcher mit Radien von 7/8 und 1/8 des Schwarzschildradius

Copyright © 2025, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.