Aufgabe: Berechnen Sie die Bahnkurve zweier rotierender Universen aus Materie und Antimaterie und erklären Sie die Expansion des Weltalls unter der Annahme, daß jedes dieser Universen aus zwei paarweisen Schwarzen Löchern besteht, die untereinander Masse austauschen.

Lösung: Zwei elektrisch neutrale Schwarze Löcher unterschiedlicher Masse $m_1 \neq m_2$ mögen sich im Abstand r gegenseitig anziehen und umeinander rotieren. Sei $M = m_1 + m_2$ die Gesamtmasse der beiden Schwarzen Löcher und

$$\mathbf{r} = r\cos\varphi\mathbf{e}_x + r\sin\varphi\mathbf{e}_y$$

der Abstandsvektor in ebenen Polarkoordinaten in einem kartesischen Koordinatensystem, dann folgt gemäß dem Zweikörperproblem der klassischen Mechanik die Beschleunigung durch zweimalige Differentiation des Ortsvektors. Die erste Ableitung liefert zunächst die Geschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{r}} = \left(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi\right)\mathbf{e}_x + \left(\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi\right)\mathbf{e}_y,$$

wobei $\dot{r}$ die Radialgeschwindigkeit und $\dot{\varphi}$ die Winkelgeschwindigkeit ist. Die Beschleunigung erhalten wir durch nochmalige Differentiation,

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= \left(\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\cos\varphi - \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\sin\varphi\right)\mathbf{e}_x + \left(\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\sin\varphi + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\cos\varphi\right)\mathbf{e}_y \\ &= \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\left(\cos\varphi\mathbf{e}_x + \sin\varphi\mathbf{e}_y\right) - \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\left(\sin\varphi\mathbf{e}_x - \cos\varphi\mathbf{e}_y\right),\end{aligned}$$

mit der Radialbeschleunigung $\ddot{r}$ und der Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$. Da eine Zentralkraft kein Drehmoment auf einen umlaufenden Körper ausübt, bleibt der Drehimpuls

$$L = \mu r^2\dot{\varphi}$$

erhalten und es gilt

$$\frac{dL}{dt} = \mu r\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right) = 0.$$

Damit leitet sich die Beschleunigung nach dem Newtonschen Gesetz $\ddot{\mathbf{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\mathbf{r}$ mittels der Gravitationskraft aus Physikaufgabe [194] her,

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{G\left(m_1 + m_2\right)}{r^2},$$

lediglich um den Rotationsanteil erweitert. Die entsprechende Bewegungsgleichung lautet:

$$\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\dot{\varphi}^2\right) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}.$$

Darin ist G die Gravitationskonstante und r der relative Abstand auf einer klassischen Umlaufbahn um den Brennpunkt einer Ellipse. Mit der reduzierten Masse

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1m_2}{M}$$

ergibt sich durch Eliminierung der Winkelgeschwindigkeit mittels des Drehimpulses das folgende Kraftgesetz,

$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{L^2}{\mu r^3} = -\frac{GM\mu}{r^2},$$

welches wir nach Multiplikation mit $\dot{r}$ umwandeln können in den Energieerhaltungssatz:

$$\mu \dot{r}\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3}\frac{dr}{dt} + \frac{GM\mu}{r^2}\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}\right) = 0.$$

Darin sind die Gesamtenergie

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r} = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu c^2 - \frac{GM\mu}{r}$$

und der Drehimpuls L Konstanten der Bewegung. Man sieht, daß ein partnerloses Universum wegen $\mu = 0$ weder eine kinetische noch eine potentielle Energie haben kann. Es könnte schlichtweg nicht existieren. Wie betrachten im folgenden zunächst die einfachen Lösungen, bei denen der Abstand r der beiden Massen konstant ist. Dann muß die Radialgeschwindigkeit verschwinden, d.h. es muß gelten: $\dot{r} = 0$. Damit erhalten wir eine Kreisbahn der Energie $E = -\mu c^2/2$. Der Energiesatz vereinfacht sich dadurch zu

$$-\frac{1}{2}\mu c^2 = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}.$$

Den konstanten Abstand nennen wir im folgenden den Schwarzschildradius R_S. Er ergibt sich durch Lösen der quadratischen Gleichung

$$r^2 - \frac{2GM}{c^2} r + \frac{L^2}{\mu^2 c^2} = 0.$$

Deren allgemeine Lösung lautet damit wie folgt:

$$r = \frac{GM}{c^2} \pm \sqrt{\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 - \frac{L^2}{\mu^2 c^2}}.$$

Ohne Drehimpuls ergibt sich somit ein Radius von

$$r = \frac{GM}{c^2} \pm \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4}} = \frac{2GM}{c^2} = R_S.$$

Wenn Rotation vorhanden ist, vereinfacht sich die quadratische Gleichung durch den Drehimpuls $L = \mu r c$ und es gilt

$$r^2 - \frac{2GM}{c^2} r + r^2 = 2r\left(r - \frac{GM}{c^2}\right) = 0,$$

und damit gilt im Abstand $r = R_S$ für den Schwarzschildradius die Relation $R_S = GM/c^2$.

Wie man sieht, sind die Definitionen des Schwarzschildradius mit und ohne Drehimpuls unterschiedlich. Wenn nun der Abstand konstant gleich dem Schwarzschildradius ist, leitet sich aus der Gesamtenergie

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r} = \frac{1}{2}\mu\frac{L^2}{\mu^2 R_S^2} - \frac{GM\mu}{R_S} = \frac{1}{2}\mu c^2 - \mu c^2 = -\frac{1}{2}\mu c^2$$

sofort eine Kreisbahn ab, und wenn die Bahngeschwindigkeit längs einer Kreisbahn konstant gleich der Lichtgeschwindigkeit ist,

$$v^2 = \dot{r}^2 + \frac{R_S^2}{r^2}c^2 = \dot{r}^2 + c^2 = c^2,$$

dann muß entweder der Radius unendlich oder die Radialgeschwindigkeit gleich null sein und die Energie den Wert

$$E = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}$$

besitzen. Umgeformt ergibt sich wieder eine quadratische Gleichung

$$\frac{1}{r^2} - \frac{2GM\mu^2}{L^2}\frac{1}{r} - \frac{2\mu E}{L^2} = 0,$$

deren Lösungen jedoch ohne expliziten Drehimpuls auskommen:

$$\frac{1}{r} = \frac{GM\mu^2}{L^2} \pm \sqrt{\left(\frac{GM\mu^2}{L^2}\right)^2 + \frac{2\mu E}{L^2}} = \frac{1}{R_S}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2E}{\mu c^2}}\right).$$

Da nur das positive Vorzeichen physikalisch sinnvoll ist, gilt

$$r = \frac{R_S}{1 + \sqrt{1 + \frac{2E}{\mu c^2}}},$$

d.h. ein solches Weltall weist keine Oszillationen auf und die Bahnkurve ist eine Ellipse mit der Energie

$$E = \frac{1}{2}\mu c^2\left(\frac{R_S^2}{r^2} - \frac{2R_S}{r}\right) = \frac{1}{2}\mu c^2\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^2 - \frac{1}{2}\mu c^2 > -\frac{1}{2}\mu c^2.$$

Dies steht im Einklang mit der allgemeinen Erfahrung, daß sich das Weltall ausdehnt. Für einen Abstand $r = 2R_S$ z.B. ist

$$E = -\frac{3}{8}\mu c^2.$$

Denselben Wert erhalten wir für $r = 2R_S/3$. Beide Abstände sind Teil derselben Ellipse. Diesen Fall werden wir zum Schluß eingehender betrachten.

Solange die Masse eines der beiden Schwarzen Löcher vernachlässig gegenüber der anderen Masse ist, können wir die reduzierte Masse durch die kleinere Masse m_2 ersetzen. Sei etwa $m_2 \ll m_1$, dann gilt der Grenzübergang

$$\mu = \lim_{m_2 \to 0} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \lim_{m_2 \to 0} \frac{m_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = m_2.$$

Das gilt insbesondere dann, wenn die beiden Schwarzen Löcher bereits vollständig fusioniert sind. Wir haben dann zwar immer noch ein Zweikörperproblem, aber anstelle der drei Massen nur noch zwei. Der Energiesatz für diesen Fall lautet

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r} = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + v_\varphi^2\right) - \frac{GM\mu}{r} = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{GM\mu}{r}$$

oder umgeformt

$$-\frac{2E}{\mu} = \frac{2GM}{r} - v^2.$$

Auf dem Schwarzschildradius ist die Geschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit, d.h.

$$c^2 - \frac{2E}{\mu} = \frac{2GM}{R_S} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2}\mu c^2 - E = \frac{GM\mu}{R_S},$$

und die Bahn ist eine Kreisbahn mit

$$E = -\frac{1}{2}\mu c^2.$$

Dann und nur dann ist

$$\frac{1}{2}\mu c^2 - E = \mu c^2 = \frac{GM\mu}{R_S} \quad \text{bzw.} \quad R_S = \frac{GM}{c^2},$$

d.h. die Energie auf dem Schwarzschildradius setzt sich wie in der klassischen Mechanik zusammen aus einer kinetischen und einer potentiellen Energie:

$$E = \frac{1}{2}\mu c^2 - \frac{GM\mu}{R_S}.$$

Die Gravitation lebt davon, daß sich Massen anziehen. Überall, wo es nicht mindestens zwei Massen gibt, gibt es auch keine Gravitationskraft. Die Geburt eines Universums wäre bei verschwindender reduzierter Masse außerdem nicht möglich, da die Gesamtmasse stets in einem Schwarzen Loch verbliebe. Ein solches Weltmodell würde nebenbei bemerkt auch die Ausbreitung der Galaxien nicht erklären. Damit eine Welt entstehen kann, ist also der Zerfall eines Schwarzen Lochs Grundvoraussetzung. Für Abstände, die größer sind als die Summe der Schwarzschildradien der beiden Schwarzen Löcher, versuchen wir nun die Radialgleichung zu lösen, um daraus die Bahnkurven zu bestimmen. Wir werden allerdings, da die Lösung mit Sicherheit ein elliptisches Integral darstellt, bald an unsere Grenzen stoßen.

Unserer Aufgabenstellung gemäß betrachten wir nun zwei sich in Richtung der Kraft aufeinander zubewegende Schwarze Löcher, die um einen gemeinsamen Schwerpunkt rotieren. Dann lautet die Radialgleichung gemäß Energiesatz

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{GM\mu}{r}\right)}.$$

Trennen wir die Variablen, ergibt sich unsere Bestimmungsgleichung:

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2} + \frac{2E}{\mu}}} = dt.$$

Wegen der Drehimpulserhaltung

$$r v_\varphi = R_S c = r^2 \dot{\varphi} = \frac{L}{\mu}$$

verschwindet der Ausdruck unter der Wurzel,

$$\frac{2R_S}{r}c^2 - \frac{R_S^2}{r^2}c^2 - c^2 = -\left(1 - \frac{2R_S}{r} + \frac{R_S^2}{r^2}\right)c^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^2 c^2,$$

und wegen der Nichterreichbarkeit der Lichtgeschwindigkeit bleibt er negativ. Dieses Integral ist einfacher lösbar, wir zur Variablen $u = 1/r$ und dem Differential

$$dr = -\frac{1}{u^2}du$$

übergehen und die Variable u in der obigen Differentialgleichung substituieren:

$$-\frac{1}{u^2\sqrt{-\frac{L^2}{\mu^2}u^2 + 2GMu + \frac{2E}{\mu}}}du = dt.$$

Damit ergibt sich folgende Stammfunktion,

$$\int \frac{du}{u^2\sqrt{-\frac{L^2}{\mu^2}u^2 + 2GMu + \frac{2E}{\mu}}} = -\frac{\mu}{2Eu}\sqrt{-\frac{L^2}{\mu^2}u^2 + 2GMu + \frac{2E}{\mu}}$$

$$-\frac{GM\mu}{2E}\sqrt{-\frac{\mu}{2E}}\arcsin\frac{GMu + \frac{2E}{\mu}}{u\sqrt{G^2M^2 + \frac{L^2}{\mu^2}\frac{2E}{\mu}}} + C,$$

womit die Lösung, wenn wir noch den Drehimpuls durch $L = \mu R_S c$ substituieren und die Variable $u = 1/r$ zurückverwandeln, wie folgt lautet:

$$t=\frac{\mu r}{2E}\sqrt{\frac{2GM}{r}-\frac{R_S^2c^2}{r^2}+\frac{2E}{\mu}}+\frac{GM\mu}{2E}\sqrt{-\frac{\mu}{2E}}\arcsin\frac{GM+\frac{2E}{\mu}r}{\sqrt{G^2M^2+R_S^2c^2\,\frac{2E}{\mu}}}+C.$$

Dies läßt sich wegen $GM=R_Sc^2$ noch einmal vereinfachen,

$$t=\frac{\mu r}{2E}\sqrt{\frac{2R_Sc^2}{r}-\frac{R_S^2c^2}{r^2}+\frac{2E}{\mu}}+\frac{R_Sc^2\mu}{2E}\sqrt{-\frac{\mu}{2E}}\arcsin\frac{R_Sc^2+\frac{2E}{\mu}r}{\sqrt{R_S^2c^4+R_S^2c^2\,\frac{2E}{\mu}}}+C,$$

und ergibt nach Umformung einen nicht nach r auflösbaren Ausdruck:

$$\frac{2E}{\mu c^2}\frac{ct}{r}=\sqrt{\frac{2R_S}{r}-\frac{R_S^2}{r^2}+\frac{2E}{\mu c^2}}+\frac{R_S}{r}\sqrt{-\frac{\mu c^2}{2E}}\arcsin\frac{1+\frac{2E}{\mu c^2}\frac{r}{R_S}}{\sqrt{1+\frac{2E}{\mu c^2}}}+C.$$

Die Integrationskonstante berechnet sich aus dem Abstand $r=R_S$,

$$\frac{2E}{\mu c^2}=\sqrt{1+\frac{2E}{\mu c^2}}+\sqrt{-\frac{\mu c^2}{2E}}\arcsin\sqrt{1+\frac{2E}{\mu c^2}}+C.$$

Wegen des Ausdrucks unter der Wurzel können gebundene Zustände nur für negative Energien realisiert werden. Legen wir eine Kreisbahn mit

$$E=-\frac{1}{2}\mu c^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{2E}{\mu c^2}=-1$$

zugrunde, ist $C=-1.$ Ferner sehen wir an dem Ausdruck

$$\frac{ct}{r}=1-\sqrt{-\left(1-\frac{R_S}{r}\right)^2}-\frac{R_S}{r}\arcsin\frac{1-\frac{r}{R_S}}{\sqrt{1+\frac{2E}{\mu c^2}}},$$

daß das Weltall Lösungen nur für $r=R_S$ bereithält, und das heißt, daß die Zeit auf dem Schwarzschildradius konstant ist: $t=T_S$. In einem sphärischen Schwarzen Loch befindet sich demnach die gesamte Masse auf dem Schwarzschildradius vereint, und seine Oberfläche ist somit ein Ort der Gleichzeitigkeit. In einem solchen Universum gibt es keine Zeit und keine Ausdehnung, es ist ein totes Gebilde. Unsere Schlußfolgerung kann daher nur sein, daß die Zeit und die Expansion des Alls nur durch einen Massezuwachs erklärt werden können, denn dadurch ändert sich der Radius und das All wird größer.

Allgemein folgt die Lösung für $\varphi,$ sobald die Lösung für r bekannt ist, durch Integration der Drehimpulsgleichung

$$d\varphi = \frac{L}{\mu}\frac{dt}{r^2}.$$

Dazu muß das Integral

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{L}{\mu}\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{r^2}$$

berechnet werden. Setzen wir das obige Zeitdifferential in die Drehimpulsgleichung ein, erhalten wir

$$d\varphi = \frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{\mu}+\frac{2GM}{r}-\frac{L^2}{\mu^2 r^2}}} = \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2\mu}{L^2}E+\frac{2GM\mu^2}{L^2}\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}}},$$

was integriert den Ausdruck

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2}+\frac{2GM\mu^2}{L^2}\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}}}$$

ergibt. Auch dieses Integral ist einfacher lösbar, wenn wir zur Variablen $u = 1/r$ und dem Differential

$$dr = -\frac{1}{u^2}du$$

übergehen und die Variable r durch u substituieren:

$$\varphi = \varphi_0 - \int\frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2}+\frac{2GM\mu^2}{L^2}u-u^2}}.$$

Mittels der Stammfunktion

$$\int\frac{du}{\sqrt{-u^2+\frac{2GM\mu^2}{L^2}u+\frac{2\mu E}{L^2}}} = -\arcsin\frac{-2u+\frac{2GM\mu^2}{L^2}}{\sqrt{\frac{4G^2M^2\mu^4}{L^4}+\frac{8\mu E}{L^2}}}+C,$$

folgt, wenn wir willkürlich $C = \pi/2$ setzen,

$$\varphi = \varphi_0 - \arcsin\frac{\frac{L^2}{GM\mu^2}u-1}{\sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2M^2\mu^3}}}+\frac{\pi}{2} = \varphi_0 + \arccos\frac{\frac{L^2}{GM\mu^2}u-1}{\sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2M^2\mu^3}}},$$

und nach Wiedereinsetzen der Hilfsvariablen $u = 1/r$ ergibt sich schließlich der Winkel in Abhängigkeit von der Radialkoordinate,

$$\varphi = \varphi_0 + \arccos \frac{\dfrac{L^2}{GM\mu^2}\dfrac{1}{r} - 1}{\sqrt{1 + \dfrac{2EL^2}{G^2M^2\mu^3}}}.$$

Da die Phase beliebig wählbar ist, setzen wir $\varphi_0 = 0$. Nach $1/r$ aufgelöst folgt die Bahngleichung als Funktion des Winkels:

$$\frac{1}{r} = \frac{GM\mu^2}{L^2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2\mu^3}}\cos\varphi\right].$$

Durch Kehrwertbildung erhalten wir die Polargleichung einer Ellipse:

$$r = \frac{L^2}{GM\mu^2}\frac{1}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{2EL^2}{G^2M^2\mu^3}}\cos\varphi}.$$

Diese besitzt mit den Halbachsen a und b und der numerischen Exzentrizität e in ebenen Polarkoordinaten die allgemeine Form

$$r = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{1 + e\cos\varphi},$$

wobei die Exzentrizität in unserem Fall gegeben ist durch

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2\mu^3}}.$$

Sie hängt mit den Halbachsen wie folgt zusammen:

$$1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2} = -\frac{2EL^2}{G^2M^2\mu^3}.$$

Damit ergeben sich für a und b und mittels der Definition des Schwarzschildradius und des Drehimpulses folgende Resultate:

$$a = \frac{L^2}{GM\mu^2\left(1 - e^2\right)} = -\frac{L^2}{GM\mu^2}\frac{G^2M^2\mu^3}{2EL^2} = -\frac{GM}{c^2}\frac{\mu c^2}{2E} = -\frac{\mu c^2}{2E}R_S,$$

$$b = \sqrt{-\frac{2EL^2a^2}{G^2M^2\mu^3}} = \sqrt{-\frac{2E}{\mu c^2}\frac{\mu^2R_S^2c^4}{G^2M^2\mu^2}\frac{\mu^2c^4}{4E^2}R_S^2} = \sqrt{-\frac{\mu c^2}{2E}}R_S.$$

Der Quotient der beiden Halbachsen liefert

$$\frac{b}{a} = \sqrt{-\frac{2E}{\mu c^2}},$$

womit sich die Exzentrizität noch einmal erheblich vereinfacht:

$$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{2E}{\mu c^2}}.$$

Deswegen kann auch die Amplitude einfacher geschrieben werden,

$$a\left(1-e^2\right)=R_S\,\frac{\mu c^2}{2E}\,\frac{2E}{\mu c^2}=R_S\,,$$

womit sich unsere Ellipsengleichung in ihrer endgültigen Form wie folgt darstellt:

$$r=\frac{R_S}{1+\sqrt{1+\frac{2E}{\mu c^2}}\cos\varphi}.$$

Somit dürfte klar sein, daß die Parabel mit $E=0$ der Grenzfall für ein stabiles Universum ist und zugleich den „Urknall“ einleiten könnte, der nichts anderes ist als ein Abweichen von einem stabilen periodischen Verhalten, das dann in ein parabolisches oder hyperbolisches Universum mündet. Das wäre der Fall, wenn der Kosinus gleich -1 wird. Da die Energie für eine gebundene Umlaufbahn in jedem Fall negativ sein muß, läßt sich der Radius des Weltalls in Polarkoordinatendarstellung gut durch eine Ellipse beschreiben. Für die Radialgeschwindigkeit gilt in diesem Fall

$$\dot r=\frac{R_S\dot\varphi}{\left(1+\sqrt{1+\frac{2E}{\mu c^2}}\cos\varphi\right)^2}\sqrt{1+\frac{2E}{\mu c^2}}\sin\varphi.$$

Setzen wir zuerst den Radius und dann den Drehimpuls ein, folgt

$$\dot r=\frac{r^2\dot\varphi}{R_S}\sqrt{1+\frac{2E}{\mu c^2}}\sin\varphi=\frac{L}{\mu R_S}\sqrt{1+\frac{2E}{\mu c^2}}\sin\varphi.$$

Die Radialgeschwindigkeit verschwindet demnach bei $\varphi=0$ und $\varphi=\pi.$ An diesen Stellen wechselt sie ihr Vorzeichen.[1] Sie erreicht ein Maximum bei $\varphi=\pi/2$ und ein Minimum bei $\varphi=3\pi/2;$ ihre Extremwerte liegen dort, wo die Lichtgeschwindigkeit erreicht wird, nämlich auf dem Schwarzschildradius. Entsprechend ist die Radialbeschleunigung

$$\ddot r=\frac{L\dot\varphi}{\mu R_S}\sqrt{1+\frac{2E}{\mu c^2}}\cos\varphi=\frac{v_\varphi^2}{R_S}\sqrt{1+\frac{2E}{\mu c^2}}\cos\varphi$$

im mathematisch positiven Umlaufsinn größer null ab $\varphi=3\pi/2$ und negativ ab $\varphi=\pi/2.$ Die Gravitationskraft

$$\mu\ddot r=\frac{L^2}{\mu r^3}-\frac{GM\mu}{r^2}$$

überwiegt also im Intervall $\pi/2\le\varphi\le3\pi/2,$ die Zentrifugalkraft im Intervall $-\pi/2\le\varphi\le\pi/2.$

[1] Die beiden Universum nähern sich wieder an, wenn sie sich zuvor voneinander entfernt haben.

Ob sich das Weltall zu einer Singularität zusammenziehen kann, wird nicht im Gesamtuniversum entschieden, sondern innerhalb eines jeden Teiluniversums aus reiner Materie oder Antimaterie, wie wir in Physikaufgabe [194] gezeigt haben.

Der maximale und minimale Abstand der reduzierten Masse auf der Ellipsenbahn ist gegeben durch

$$r_{\min} = a - \sqrt{a^2 - b^2} = a - a\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = a(1-e) = -\frac{\mu c^2}{2E} R_S \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2E}{\mu c^2}}\right),$$

$$r_{\max} = 2a - \left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right) = a + a\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = a(1+e) = -\frac{\mu c^2}{2E} R_S \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2E}{\mu c^2}}\right).$$

Addieren wir diese beiden Werte, ergibt sich der Schwarzschildradius als deren arithmetischer Mittelwert,

$$r_{\max} + r_{\min} = -\frac{\mu c^2}{E} R_S \quad \text{bzw.} \quad R_S = -\frac{2E}{\mu c^2} \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2}.$$

Um nun die Bahngeschwindigkeiten zu bestimmen, gehen wir von der Gesamtgeschwindigkeit aus:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{\mu^2 r^2}.$$

Aus dem Drehimpuls auf dem Schwarzschildradius $L = \mu R_S c$ folgt

$$v^2 = \dot{r}^2 + \frac{R_S^2}{r^2} c^2.$$

Da die Radialgeschwindigkeit im bahnfernsten und bahnnächsten Punkt verschwindet, lassen sich die minimalen und maximalen Geschwindigkeiten entsprechend leicht berechnen:

$$v_{\min} = \frac{cR_S}{r_{\max}} = -\frac{2E}{\mu c^2} \frac{c}{1 + \sqrt{1 + \frac{2E}{\mu c^2}}}, \quad v_{\max} = \frac{cR_S}{r_{\min}} = -\frac{2E}{\mu c^2} \frac{c}{1 - \sqrt{1 + \frac{2E}{\mu c^2}}}.$$

Nach Multiplikation der beiden Abstände mit den Geschwindigkeiten erkennen wir, daß der Drehimpuls in beiden Fällen konstant bleibt:

$$L = \mu r_{\max} v_{\min} = \mu r_{\min} v_{\max} = cR_S.$$

Beim Kreis als Grenzfall einer Ellipse mit einer Bindungsenergie von

$$E = -\frac{1}{2} \mu c^2$$

sind die Abstände konstant: $r = R_S$. Die Kreisbahn entspricht dem negativsten Wert, den die Energie annehmen kann, bei negativeren Werten wird die Wurzel imaginär. Was hier als Bahn bezeichnet wird, ist nichts anderes als ein periodisch sich ändernder Schwarzschildradius. Wenn der Radius zu- oder abnimmt, ändert sich auch die Masse und damit die Energie. Diese fehlende oder überschüssige Energie muß irgendwoher kommen oder irgendwohin abwandern.

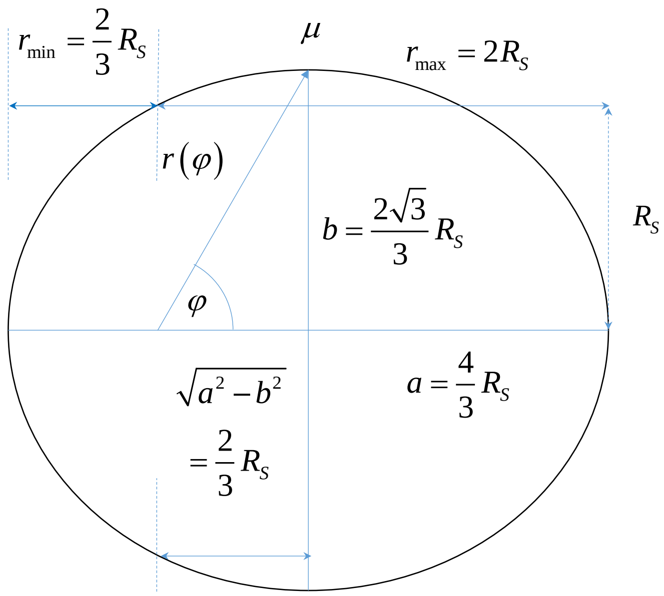

Abbildung 1. Elliptische Bahn des Universums mit einer numerischen Exzentrizität von 1/2

Daher ist es naheliegend, daß zwei miteinander in Wechselwirkung stehende Universen Masse miteinander austauschen. Das geht nur, wenn die beiden Universen miteinander in Berührung kommen. Die Netto-Massebilanz muß wiederum konstant sein. Ein vollständiger Massetransfer vom Antiuniversum in unser sichtbares Universum würde die Masse verdoppeln oder ganz zum Verschwinden bringen. Bringt man Materie und Antimaterie miteinander in Kontakt, entsteht eine Kettenreaktion, bis die gesamte Masse in Energie umgewandelt ist. Kollidieren jedoch zwei sich umkreisende Schwarze Löcher, dann verringert sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 die Masse des einen, während die des anderen sich erhöht. Wenn die beiden Schwarzen Löcher sich wieder voneinander entfernen, bleibt diese Differenz bestehen, bis sie sich auf ihrer Bahn wieder so weit annähern, daß der gleiche Prozeß von neuem einsetzt. Die Schwierigkeiten, die sich mit einer elliptischen Bahn ergeben, wollen wir nachfolgend erörtern. Da die Exzentrizität beliebig gewählt werden kann, entscheiden wir uns, um uns das Leben so einfach wie möglich zu machen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit für eine Bindungsenergie von

$$E = -\frac{3}{8}\mu c^2.$$

Damit ergeben sich folgende Halbachsen,

$$a = -\frac{\mu c^2}{2E} R_S = \frac{4}{3} R_S, \quad b = \sqrt{-\frac{\mu c^2}{2E}} R_S = \frac{2\sqrt{3}}{3} R_S,$$

wobei die Exzentrizität den Wert

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E}{\mu c^2}} = \frac{1}{2}$$

annimmt und die Ellipsengleichung nunmehr wie folgt lautet:

$$r = \frac{R_S}{1 + \frac{1}{2}\cos\varphi}.$$

Der Schwarzschildradius wird auf dieser Bahn bei einem Winkel von $\varphi_S = \pi/2$ bzw. $3\pi/2$ erreicht (siehe Abb. 1):

$$r\left(\varphi_S\right) = \frac{R_S}{1+\frac{1}{2}\cos\varphi_S} = R_S.$$

Wie man sieht, ist die kleine Halbachse nur geringfügig kleiner als die große. Die Brennpunkte liegen relativ zum Mittelpunkt der Ellipse bei

$$\pm\sqrt{a^2-b^2} = \pm R_S\sqrt{\frac{16}{9}-\frac{12}{9}} = \pm\frac{2}{3}R_S,$$

also genau bei der Hälfte der großen Halbachse, und die maximalen und minimalen Abstände ergeben sich zu

$$r_{\min} = -\frac{\mu c^2}{2E}R_S\left(1-\sqrt{1+\frac{2E}{\mu c^2}}\right) = \frac{4}{3}R_S\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}R_S,$$
$$r_{\max} = -\frac{\mu c^2}{2E}R_S\left(1+\sqrt{1+\frac{2E}{\mu c^2}}\right) = \frac{4}{3}R_S\left(1+\frac{1}{2}\right) = 2R_S.$$

Die entsprechenden Geschwindigkeiten lauten

$$v_{\min} = -\frac{2E}{\mu c^2}\frac{c}{1+\sqrt{1+\frac{2E}{\mu c^2}}} = \frac{1}{2}c, \quad v_{\max} = \frac{3}{2}c.$$

Im minimalen Abstand, der Periapsis, wird die Lichtgeschwindigkeit um die Hälfte überschritten, im maximalen Abstand hingegen, der Apoapsis, wird nur die Hälfte der Lichtgeschwindigkeit erreicht. Somit sind die Ereignisse in bezug auf den Lichtkegel im Intervall $\pi/2 \le \varphi \le 3\pi/2$ raumartig und im Intervall $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$ zeitartig, wie es uns unsere Alltagserfahrung vor Augen führt. Wir würden davon allerdings nichts merken, da wir in unserem Universum eingeschlossen sind.[2] Trotzdem verletzen wir mit dieser Feststellung die Kernaussage der Speziellen Relativitätstheorie, daß nämlich die Lichtgeschwindigkeit nicht überschritten werden kann, und wir können dann auch nicht erklären, wie sich zwei getrennte Universen umkreisen sollen, wenn sie sich nicht gegenseitig anziehen können, weil die Gravitationskraft nur bis zum Schwarzschildradius reicht.[3] Da Masse sich nicht selbst anziehen kann, bedarf es einer weiteren, aus Symmetriegründen gleich großen Masse M im Abstand des Schwarzschilddurchmessers $2R_S$, damit die beiden Universen sich gerade noch berühren können. Daraus ergibt sich fast zwangsläufig, daß es außer dem unsrigen noch ein weiteres Universum geben muß, welches wir das Antiuniversum nennen. Dieses Antiuniversum kann sich unserem Universum bis auf

[2] Das sollte man nicht allzu wörtlich nehmen, denn klettern wir z.B. auf einen Berg, befinden wir uns bereits in einem anderen Universum mit einem größeren Schwarzschildradius, in dem eine andere Zeit gilt. Steigen wir wieder ins Tal hinab, sind wir tatsächlich, wenn auch nur unwesentlich, jünger geblieben als unsere Altersgenossen drunten im Tal.

[3] Vielleicht ist das Graviton doch schneller als die Lichtgeschwindigkeit; das würde zumindest einige neuere Experimente an verschränkten Zuständen erklären, bei denen sich die Wellenfunktion instantan ausbreitet.

den doppelten Schwarzschildradius nähern. Um das System aus Universum und Antiuniversum stabil zu halten, müssen sich die Bindungsenergien gegenseitig aufheben und die Gesamtenergie muß null sein, denn warum sollte der Schwerpunkt, der sich nicht bewegt, kinetische Energie besitzen und Arbeit verrichten können, wenn sich in ihm alle Kräfte aufheben?

Ordnen wir zwei Universen der Masse M, eines aus Materie und das andere aus Antimaterie, nebeneinander an, erhalten wir die Darstellung in Abb. 2. Wandern wir mit einer der Massen längs der Bahnkurve, können sich diese Universen nur in den Scheitelpunkten berühren und nur dort Masse miteinander austauschen. Der Schwarzschildradius hat nach einer vollen Umlaufperiode seinen alten Wert wieder erreicht. Die fehlende Energie ist nicht verschwunden, sondern ins andere Universum hinübergewechselt. Das Antiuniversum in Abb. 3 läuft nämlich im Gegenuhrzeigersinn, so daß sich beide Universen gegenseitig auslöschen würden, wenn wir sie an der vertikalen Achse[4] spiegeln.

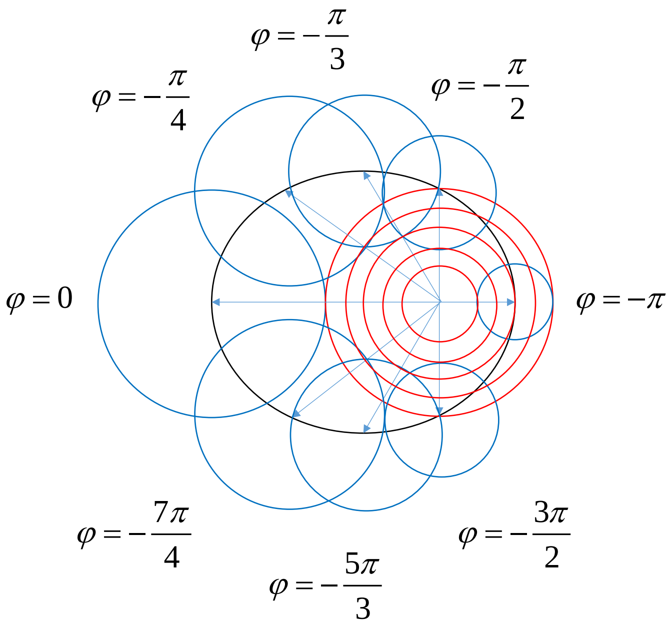

Abbildung 2. Elliptische Bahn des Universums (blau) um das Antiuniversum (rot) im Uhrzeigersinn

In den Abbildungen 2 und 3 sind solche Fälle dargestellt, bei denen die zentrale und die umlaufende Masse gleich sind. Dann hat die reduzierte Masse im Abstand des doppelten Schwarzschildradius den Wert $M/2$. Dabei gilt es festzuhalten, daß man entweder innerhalb des Schwarzschildradius bleibt oder aber die Lichtgeschwindigkeit überschreitet. Für Abstände größer als der Schwarzschildradius liegt man außerhalb des Ereignishorizonts und außerhalb der elektromagnetischen Wechselwirkung, jedoch nicht außerhalb der Gravitationsreichweite, sofern man postuliert, daß die Lichtgeschwindigkeit vom Graviton überschritten werden kann.[5] Man muß also nicht erst einen kompletten Umlauf abwarten, sondern man sieht an der aufgeklappten Darstellung in Abb. 4, daß sich Materie und Antimaterie zu jedem Zeitpunkt in allen Erhaltungssätzen vollständig aufheben. Gesamtenergie und Gesamtdrehimpuls des Universums sind und bleiben null. Natürlich kommt es periodisch zu den gefürchteten Punktsingularitäten,

---

[4] In Richtung der kleinen Halbachse

[5] Einstein hat auch für das Graviton die Lichtgeschwindigkeit als Obergrenze festgelegt. Mit dieser Annahme würde sich das Weltall aus heutiger Sicht tatsächlich unendlich weit ausdehnen, weil die Massenanziehung außerhalb der Schwarzschildradius aufhören würde zu wirken.

die die Urknallsituation heraufbeschwören, zumal Schwarze Punktlöcher sehr heiß sind. Das würde aber zumindest die kosmische Hintergrundstrahlung erklären.

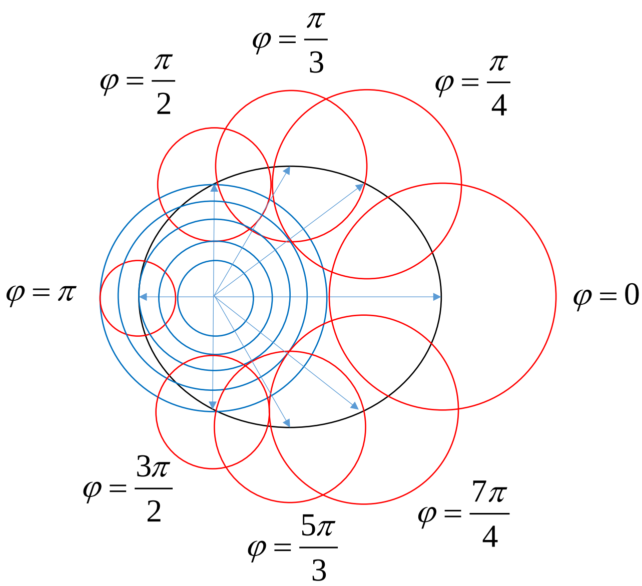

Abbildung 3. Elliptische Bahn des Antiuniversums (rot) um das Universum (blau) im Gegenuhrzeigersinn

So gesehen kann man sich die Situation nach einem halben Umlauf als den Ort und Zeitpunkt der Raum- und Energieumkehr vorstellen, d.h. als einen Wechsel vom Universum ins Antiuniversum. Nach einem vollen Umlauf haben reduzierte Masse und Zentralmasse ihre alte Position wieder erreicht. Das entspricht einem periodischen Wechseln der Brennpunkte. Im gegenläufigen Antiuniversum liegt die Geschwindigkeit gänzlich im zulässigen Bereich, da dort der Drehsinn gewechselt und der Drehimpuls sich umgekehrt hat. Was diese Umpolung auf dem Schwarzschildradius bewirkt hat, bedarf noch einer eingehenden Erklärung. Es muß aber mit der Parität zusammenhängen, denn die physikalischen Gesetze gelten auch nach einer Raum- und Zeitspiegelung.

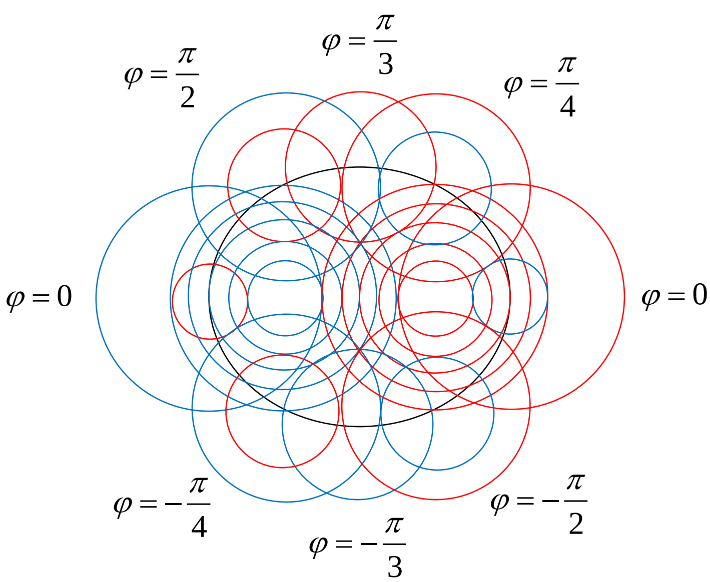

Abbildung 4. Darstellung des „aufgeklappten“, nichtexistierenden elliptischen Doppeluniversums

Die Periodizität eines Universums[6] kann man sich nun wie folgt erklären: Universum und Antiuniversum berühren sich in nur einem einzigen Punkt, dem Schwerpunkt ihrer beiden Massen auf dem Schwarzschildradius. Dadurch werden hochenergetische Photonen in Materie umgewandelt, die zwei Punktsingularitäten ergeben. Da die Drehimpulse von Universum und Antiuniversum entgegengerichtet sind, entfernen sich die beiden Punksingularitäten in entgegengesetzter Richtung. Beide Universen sind nun voneinander getrennt. Den weiteren Gang der Entwicklung haben wir in Physikaufgabe [194] beschrieben.

Die zunächst tangentiale Bewegung der Punktsingularität hat eine Beschleunigungskomponente in Richtung des Brennpunkts der Ellipse. Ihre kinetische Energie wird dadurch größer, wird aber durch die potentielle ausgeglichen, so daß die Gesamtenergie konstant bleibt. Nach Durchlaufen der Periapsis wird durch die Zunahme der Radialgeschwindigkeit auch der Radius der Punktsingularität größer, und weil die Masse Schwarzer Löcher proportional zu ihren Radien ist, wächst schließlich auch ihre Masse. Das führt dazu, daß aus der ursprünglichen Punktsingularität wieder ein vollständiges Universum wird. Dieses besitzt dann einen Radius, der mit dem des Antiuniversums einen einzigen Berührungspunkt aufweist, womit der gesamte Prozeß von neuem beginnen kann. Im Antiuniversum müssen sich aus Symmetriegründen dieselben Vorgänge abspielen wie im Universum, nur eben spiegelbildlich. Außerdem muß die Gravitationskraft eine „Überreichweite" besitzen, sonst könnte sie die beiden Universen nicht zusammenhalten. Das Graviton, das Austauschteilchen der Gravitation, muß im Bahnminimum die doppelte Lichtgeschwindigkeit annehmen, die genau dem Abstand der beiden Universen entspricht.

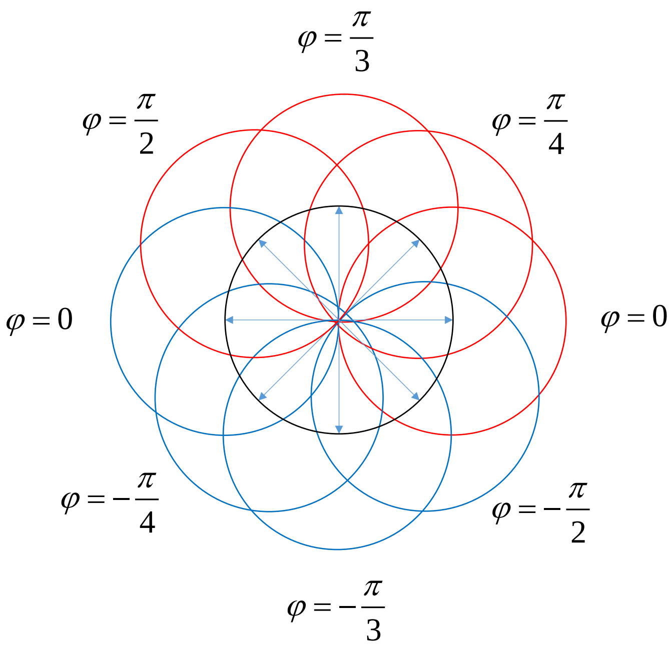

Abbildung 5. Darstellung des kreisförmigen Doppeluniversums mit Gesamtdrehimpuls null

Das kreisförmige Doppeluniversum in Abb. 5 ist lediglich ein Spezialfall eines elliptischen Universums, bei dem sich die Größe und damit der Radius nicht ändert. In diesem Fall erfolgt

[6] Von Geburt kann man bei einem gespiegelten Universum nicht reden.

keine Masseübertragung vom einen zum anderen. Damit wird zwar die Lichtgeschwindigkeit nicht überschritten, allerdings findet sich auch kein ausgezeichneter Punkt, der eine Punktsingularität auslösen könnte. Dies kann jedoch nicht dem Zufall überlassen bleiben. Zwei sich konstant in einem Punkt reibende Sphären würden genausoviel Masse verlieren, wie sie vom anderen Universum erhalten. Ihr Radius bliebe demnach konstant. Ob dann eine Ausdehnung des Universums erfolgen würde, bleibt fraglich. Schließlich muß die Zeit durch eine Größenzunahme initiiert werden, was nicht nur ein intrinsischer Effekt jedes einzelnen Universums sein kann. Ein anderer Aspekt ist die scheinbar unendliche Aufeinanderfolge von Punktsingularitäten und ihre gegenseitige Verschaltung, was die mathematische Beschreibung nicht gerade einfacher macht. Kurzum, es spricht sehr vieles für einen elliptischen Bahnverlauf.

Sie werden sich vielleicht fragen, wo die restliche Masse nach einem halben Umlauf verblieben ist. Nun, sie ist in den reziproken Raum abgewandert. Es gilt nämlich das Gesetz der Wirkung, wonach Schwarzschildradius und Schwarzschildzeit durch ihre reziproken Größen gegeben sind, den Schwarzschild-Impuls und die Schwarzschild-Energie:

$$R_S = \frac{\hbar}{P_S} \quad \text{bzw.} \quad T_S = \frac{\hbar}{E_S}.$$

Raumzeit und Impulsenergie sind nämlich äquivalent. Materie und Strahlung sind zwar energetisch beide Energien, aber ihrem Wesen nach doch wieder verschieden. Somit wird die Einsteinsche Energie-Masse-Äquivalenz eigentlich besser quantenmechanisch durch

$$E = M_S c^2 = E_S + \frac{\hbar c}{R_S} = \frac{\hbar}{T_S} + P_S c$$

beschrieben, wobei die Anteile variieren können und nicht notwendig gleich sein müssen. Tatsächlich sind Energie und Impuls wesensmäßig verschieden. Der Impuls bezieht sich auf die räumliche (materielle) Masse, die Energie auf die zeitliche (strahlungsmäßige) Masse. Beide sind ineinander konvertierbar. Folglich gehört zu jedem raumzeitlichen Schwarzen Loch auch ein reziprokes impulsenergetisches Schwarzes Loch. Wenn der Raum maximal ausgedehnt ist, befindet sich die Strahlungsenergie in einem heißen Maximum; ist der Raum hingegen winzig klein, verschwindet sie und es wird kalt. Für die Zeit gilt das Analoge. Es scheint, als könne im Universum nicht alles in einen Topf geworfen werden. Wenn man den Raum quantisiert, ist die Zeit reziprok quantisiert:

$$E = \hbar\left(\frac{n}{t_P} + \frac{c}{n l_P}\right) = \hbar\omega.$$

Hierbei sind l_P die Planck-Länge und t_P die Planck-Zeit. Nun versteht man auch, warum das Universum einen Drehimpuls besitzen muß, der ohne ein Antiuniversum nicht erklärbar ist.[7]

[7] Weil die reduzierte Masse verschwindet

