Aufgabe: Zeigen Sie anhand von Schrödingers Katze, daß das Universum eine Überlagerung zweier kohärenter Zustände ist, und bestätigen Sie damit die Viele-Welten-Theorie.

Lösung: Nach der Lorentz-Transformation gilt im bewegten Bezugssystem die Eigenzeit

$$t_0 = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Diese hängt sowohl von der Zeit als auch vom Ort des unbewegten Systems ab. Sich selbst sieht der Beobachter des bewegten Bezugssystems am Ort $x = vt$ der Singularität, d.h. zur Zeit

$$t_0 = \frac{t - \frac{v^2}{c^2} t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Daß der Beobachter immer noch eine Zeit größer null mißt, bedeutet, daß seine Geschwindigkeit noch nicht Lichtgeschwindigkeit erreicht hat. Den Urknall hingegen erlebt der Beobachter des bewegten Koordinatensystems am Ort $x = 0$ mit der Geschwindigkeit $v = 0,$ also bei $t_0 = t,$ was dem Alter des Universums entspricht. Natürlich können wir selbst mit den bestauflösenden Teleskopen nicht so weit zurückblicken, da das Licht erst 380000 Jahre nach dem Urknall entstanden ist.

Nach der Lorentz-Transformation gilt im bewegten Bezugssystem die Ruhemasse[1] bzw. Ruheenergie

$$m_0 = \frac{m - \frac{v}{c^2} p_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{bzw.} \quad E_0 = \frac{E - v p_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Der Beobachter selbst sieht sich dem Impuls $p_x = mv$ des Systems der Singularität ausgesetzt, d.h. einer Ruheenergie von

$$E_0 = \frac{E - mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = E\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

[1] Oft wird versucht, den Begriff „Ruhemasse“ aus der Relativitätstheorie zu verbannen. Wie wir sehen werden, ist dies völlig inakzeptabel, da die Ruhemasse ihr Analogon in der Eigenzeit findet.

Ein Beobachter mißt also niemals die gesamte Energie E des Universums, sondern nur einen Bruchteil, der Rest bleibt „dunkle“ Energie.

Den Urknall wiederum sieht der Beobachter im bewegten Koordinatensystem mit einem Impuls von $p_x = 0$ bei einer Geschwindigkeit von $v = 0,$ also bei $E_0 = E,$ was der Masse des gesamten Universums entspricht.[2] Multiplizieren wir die beiden Gleichungen des bewegten Systems, erhalten wir die sogenannte Ruhe- oder Eigenwirkung

$$E_0 t_0 = Et\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = \hbar,$$

die nur deswegen so klein ist, weil sich das All mit nahezu Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Umgekehrt gilt für die Wirkung im Inertialsystem, dem stationären System der Singularität, der größenmäßig nahezu unendliche Kehrwert

$$Et = \frac{\hbar}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Ersetzen wir die Wirkung durch einen quantenmechanischen Operator

$$\hat{\hbar} = \frac{\hbar}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

und wenden diesen auf die Eigenvektoren der Wirkung an, lautet unsere Eigenwertgleichung

$$\hat{\hbar}\left|n\right\rangle = \frac{\hbar}{1-\frac{v^2}{c^2}}\left|n\right\rangle.$$

In der klassischen Mechanik kann man die Wirkung mittels der geometrischen Reihe als Überlagerung aus unendlich vielen Beiträgen zusammensetzen:

$$\begin{aligned} Et &= \frac{\hbar}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\hbar}{2}\frac{1}{1-\frac{v}{c}} + \frac{\hbar}{2}\frac{1}{1+\frac{v}{c}} = \frac{\hbar}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{v}{c}\right)^n + \frac{\hbar}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{v}{c}\right)^n \\ &= \frac{\hbar}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{v}{c}\right)^n = \frac{\hbar}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{v}{c}\right)^{2n}. \end{aligned}$$

In der Quantenmechanik bezeichnet man eine solche Überlagerung von zwei kohärenten Zuständen mit entgegengesetzter Phase als Katzenzustand,

[2] Da wir nicht bis zum Urknall zurückblicken können, haben wir von den wahren Ausmaßen und der wahren Größe des Alls keine rechten Vorstellungen.

$$\hat{\hbar}\left|n\right\rangle = \frac{\hbar}{1-\frac{v^2}{c^2}}\left|n\right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\hbar}{1-\frac{v}{c}}\left|n\right\rangle + \frac{1}{2}\frac{\hbar}{1+\frac{v}{c}}\left|n\right\rangle = \frac{\hbar}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{v}{c}\right)^n\left|n\right\rangle + \frac{\hbar}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{v}{c}\right)^n\left|n\right\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+(-1)^n\right]\left(\frac{v}{c}\right)^n\left|n\right\rangle = \hbar\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{v}{c}\right)^{2n}\left|2n\right\rangle.$$

Der Erwartungswert des Wirkungsoperators entspricht damit genau dem klassischen Wert

$$\left\langle\hat{\hbar}\right\rangle = \left\langle n\middle|\hat{\hbar}\middle|n\right\rangle = \frac{\hbar}{1-\frac{v^2}{c^2}}\left\langle n\middle|n\right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\hbar}{1-\frac{v}{c}}\left\langle n\middle|n\right\rangle + \frac{1}{2}\frac{\hbar}{1+\frac{v}{c}}\left\langle n\middle|n\right\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{v}{c}\right)^n\left\langle n\middle|n\right\rangle + \frac{\hbar}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{v}{c}\right)^n\left\langle n\middle|n\right\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{v}{c}\right)^n + \frac{\hbar}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{v}{c}\right)^n = \frac{\hbar}{2}\frac{1}{1-\frac{v}{c}} + \frac{\hbar}{2}\frac{1}{1+\frac{v}{c}} = \frac{\hbar}{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

wobei wir von der Relation $\left\langle n\middle|n\right\rangle = 1$ Gebrauch gemacht haben. All das läßt sich einfacher zeigen, wenn wir schreiben:

$$\left\langle\hat{\hbar}\right\rangle = \frac{\hbar}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+(-1)^n\right]\left(\frac{v}{c}\right)^n\left\langle n\middle|n\right\rangle = \hbar\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{v}{c}\right)^{2n}\left\langle 2n\middle|2n\right\rangle = \frac{\hbar}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Ersetzen wir nun die Geschwindigkeit v durch die Phase $\phi < 1$, wobei $v = \phi c$, so ergeben sich die beiden Teilzustände

$$\left|Et\right\rangle = \frac{\hbar}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\phi^n\left|n\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\left|n\right\rangle\left\langle n\middle|Et\right\rangle,$$

$$\left|-Et\right\rangle = \frac{\hbar}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\phi^n\left|n\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\left|n\right\rangle\left\langle n\middle|-Et\right\rangle$$

mit den Skalarprodukten

$$\left\langle n\middle|Et\right\rangle = \frac{\hbar}{2}\phi^n, \quad \left\langle n\middle|-Et\right\rangle = \frac{\hbar}{2}(-1)^n\phi^n.$$

Mittels Rekursion und ohne daß es hierzu eines Erzeugungs- oder Vernichtungsoperators bedarf, erhalten wir die für die spätere Normierung wichtigen Größe ϕ^0:

$$\left\langle n\middle|Et\right\rangle = \phi\frac{\hbar}{2}\phi^{n-1} = \phi\left\langle n-1\middle|Et\right\rangle = \phi^2\left\langle n-2\middle|Et\right\rangle = \ldots = \phi^n\left\langle 0\middle|Et\right\rangle = \phi^n\frac{\hbar}{2}\phi^0$$

bzw.

$$\langle n|-Et\rangle = (-1)\phi\frac{\hbar}{2}(-1)^{n-1}\phi^{n-1} = (-1)\phi\langle n-1|-Et\rangle = (-1)^2\phi^2\langle n-2|-Et\rangle$$
$$= \ldots = (-1)^n\phi^n\langle 0|-Et\rangle = (-1)^n\phi^n\frac{\hbar}{2}\phi^0.$$

Setzen wir die Entwicklungskoeffizienten in die kohärenten Zustände ein,

$$|Et\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\phi^n\langle 0|Et\rangle|n\rangle = \frac{\hbar}{2}\phi^0\sum_{n=0}^{\infty}\phi^n|n\rangle,$$
$$|-Et\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\phi^n\langle 0|-Et\rangle|n\rangle = \frac{\hbar}{2}\phi^0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\phi^n|n\rangle$$

lassen sich ein gerader und ein ungerader Katzenzustand präparieren:

$$|\mathrm{cat}\rangle_e = |Et\rangle + |-Et\rangle = \frac{\hbar}{2}\phi^0\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n\right)\phi^n|n\rangle = \hbar\phi^0\sum_{n=0}^{\infty}\phi^{2n}|2n\rangle,$$
$$|\mathrm{cat}\rangle_o = |Et\rangle - |-Et\rangle = \frac{\hbar}{2}\phi^0\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-(-1)^n\right)\phi^n|n\rangle = \hbar\phi^0\sum_{n=0}^{\infty}\phi^{2n+1}|2n+1\rangle.$$

Wie es scheint, ist die Welt ein Überlagerungszustand zweier kohärenter Zustände: ein Zustand, in dem die Welt sehr groß und fast unendlich wird,

$$|Et\rangle = \frac{\hbar}{2}\phi^0\sum_{n=0}^{\infty}\phi^n|n\rangle = \frac{\hbar}{2}\phi^0\left(|0\rangle + \phi^1|1\rangle + \phi^2|2\rangle + \phi^3|3\rangle + \ldots\right),$$

und ein zweiter, in dem sie verschwindend klein gerät,

$$|-Et\rangle = \frac{\hbar}{2}\phi^0\sum_{n=0}^{\infty}(-\phi)^n|n\rangle = \frac{\hbar}{2}\phi^0\left(|0\rangle - \phi^1|1\rangle + \phi^2|2\rangle - \phi^3|3\rangle + \ldots\right).$$

Einzig der Überlagerungszustand, der eine Superposition aus beiden Zuständen ist, gibt die wahre Welt wieder. Obwohl es paradox klingt, aber es gibt die Welt einerseits (sie entspricht der lebendig vorgefundenen Katze) und andererseits auch wieder nicht (was der toten Katze entspricht). Wir müssen für diese Erfahrung allerdings keine Schranktüren öffnen und kein Giftgas einsetzen, sondern allein aus der Tatsache, daß wir unsere Welt sehen, folgt bereits die Messung, die ergeben hat, daß wir in der „unendlich“ ausgedehnten Welt leben. Und dann ist da noch diese andere Welt, die wir nicht sehen können, weil die Entscheidung ja bereits getroffen wurde. Mithin läßt sich aber erkennen, daß die Quantenmechanik auch im Makroskopischen gilt.

Um unsere Katzenzustände zu normieren, benötigen wir noch die Bra-Vektoren

$$\langle Et| = \sum_{m=0}^{\infty}\langle Et|m\rangle\langle m|, \quad \langle -Et| = \sum_{m=0}^{\infty}\langle -Et|m\rangle\langle m|,$$

die sich mit Hilfe der Skalarprodukte

$$\langle Et|m\rangle = \frac{\hbar}{2}\phi^m, \quad \langle -Et|m\rangle = \frac{\hbar}{2}(-1)^m \phi^m$$

auf einen Anfangszustand zurückführen lassen, denn nach Iteration gilt

$$\begin{aligned}\langle Et|m\rangle &= \frac{\hbar}{2}\phi^m = \phi\frac{\hbar}{2}\phi^{m-1} = \phi\langle Et|m-1\rangle = \phi^2\frac{\hbar}{2}\phi^{m-2} = \phi^2\langle Et|m-2\rangle \\ &= \ldots = \phi^m\frac{\hbar}{2}\phi^0 = \phi^m\langle Et|0\rangle\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\langle -Et|m\rangle &= \frac{\hbar}{2}(-1)^m\phi^m = (-1)\phi\frac{\hbar}{2}(-1)^{m-1}\phi^{m-1} = (-1)\phi\langle -Et|m-1\rangle \\ &= (-1)^2\phi^2\frac{\hbar}{2}(-1)^{m-2}\phi^{m-2} = (-1)^2\phi^2\langle -Et|m-2\rangle \\ &= \ldots = (-1)^m\phi^m\frac{\hbar}{2}\phi^0 = (-1)^m\phi^m\langle -Et|0\rangle.\end{aligned}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die kohärenten Zustände ein, folgt

$$\begin{aligned}\langle Et| &= \sum_{m=0}^{\infty}\phi^m\langle Et|0\rangle\langle m| = \frac{\hbar}{2}\phi^0\sum_{m=0}^{\infty}\phi^m\langle m|, \\ \langle -Et| &= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\phi^m\langle -Et|0\rangle\langle m| = \frac{\hbar}{2}\phi^0\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\phi^m\langle m|,\end{aligned}$$

womit sich insgesamt die folgenden vier Vektoren ergeben:

$$\begin{aligned}\langle Et| &= \frac{\hbar}{2}\phi^0\sum_{m=0}^{\infty}\phi^m\langle m|, & |Et\rangle &= \frac{\hbar}{2}\phi^0\sum_{n=0}^{\infty}\phi^n|n\rangle, \\ \langle -Et| &= \frac{\hbar}{2}\phi^0\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\phi^m\langle m|, & |-Et\rangle &= \frac{\hbar}{2}\phi^0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\phi^n|n\rangle.\end{aligned}$$

Die entsprechenden Skalarprodukte lauten:

$$\begin{aligned}\langle Et|Et\rangle &= \frac{\hbar^2}{4}\left(\phi^0\right)^2\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\phi^{m+n}\langle m|n\rangle, \\ \langle Et|-Et\rangle &= \frac{\hbar^2}{4}\left(\phi^0\right)^2\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\phi^{m+n}\langle m|n\rangle, \\ \langle -Et|Et\rangle &= \frac{\hbar^2}{4}\left(\phi^0\right)^2\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m\phi^{m+n}\langle m|n\rangle, \\ \langle -Et|-Et\rangle &= \frac{\hbar^2}{4}\left(\phi^0\right)^2\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{m+n}\phi^{m+n}\langle m|n\rangle.\end{aligned}$$

Aufgrund der Orthogonalität $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$ ergeben sich einfache Reihenentwicklungen:

$$\langle Et|Et\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\left(\phi^0\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{2n}, \qquad \langle Et|-Et\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\left(\phi^0\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \phi^{2n},$$
$$\langle -Et|Et\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\left(\phi^0\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \phi^{2n}, \quad \langle -Et|-Et\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\left(\phi^0\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{2n}.$$

Nach Substitution mittels der geometrischen Reihe folgt

$$\langle Et|Et\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\left(\phi^0\right)^2 \frac{1}{1-\phi^2}, \quad \langle Et|-Et\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\left(\phi^0\right)^2 \frac{1}{1+\phi^2},$$
$$\langle -Et|Et\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\left(\phi^0\right)^2 \frac{1}{1+\phi^2}, \quad \langle -Et|-Et\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\left(\phi^0\right)^2 \frac{1}{1-\phi^2}.$$

Alternativ können wir schreiben:

$$\langle Et|Et\rangle = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \langle Et|m\rangle\langle Et|n\rangle\langle m|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\langle Et|n\rangle\right|^2,$$
$$\langle Et|-Et\rangle = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \langle Et|m\rangle\langle -Et|n\rangle\langle m|n\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \langle Et|m\rangle\langle -Et|n\rangle,$$
$$\langle -Et|Et\rangle = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \langle -Et|m\rangle\langle Et|n\rangle\langle m|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle -Et|n\rangle\langle Et|n\rangle,$$
$$\langle -Et|-Et\rangle = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \langle -Et|m\rangle\langle -Et|n\rangle\langle m|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\langle -Et|n\rangle\right|^2.$$

Das Skalarprodukt des Katzenzustandes lautet dann:

$$\left(\langle Et| + \langle -Et|\right)\left(|Et\rangle + |-Et\rangle\right) = \langle Et|Et\rangle + \langle Et|-Et\rangle + \langle -Et|Et\rangle + \langle -Et|-Et\rangle$$
$$= \frac{\hbar^2}{4}\left(\phi^0\right)^2 \frac{1}{1-\phi^2} + \frac{\hbar^2}{4}\left(\phi^0\right)^2 \frac{1}{1+\phi^2} + \frac{\hbar^2}{4}\left(\phi^0\right)^2 \frac{1}{1+\phi^2} + \frac{\hbar^2}{4}\left(\phi^0\right)^2 \frac{1}{1-\phi^2} = \frac{\hbar^2}{1-\phi^4}$$
$$= \frac{\hbar^2}{2}\left(\phi^0\right)^2 \frac{1}{1-\phi^2} + \frac{\hbar^2}{2}\left(\phi^0\right)^2 \frac{1}{1+\phi^2} = \hbar^2\left(\phi^0\right)^2 \frac{1}{1-\phi^4} = 1,$$

woraus sich die Normierungskonstante

$$\phi^0 = \frac{\sqrt{1-\phi^4}}{\hbar}$$

ableiten läßt. Unsere normierten Zustände lauten damit wie folgt:

$$\langle Et| = \frac{1}{2}\sqrt{1-\phi^4}\sum_{m=0}^{\infty} \phi^m \langle m|, \qquad |Et\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{1-\phi^4}\sum_{n=0}^{\infty} \phi^n |n\rangle,$$
$$\langle -Et| = \frac{1}{2}\sqrt{1-\phi^4}\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \phi^m \langle m|, \quad |-Et\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{1-\phi^4}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \phi^n |n\rangle$$

und die zugehörigen Skalarprodukte sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
\langle Et|Et\rangle &= \frac{1}{4}\left(1-\phi^4\right)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\phi^{m+n}\langle m|n\rangle = \frac{1}{4}\left(1-\phi^4\right)\sum_{n=0}^{\infty}\phi^{2n},\\
\langle Et|-Et\rangle &= \frac{1}{4}\left(1-\phi^4\right)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\phi^{m+n}\langle m|n\rangle = \frac{1}{4}\left(1-\phi^4\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\phi^{2n},\\
\langle -Et|Et\rangle &= \frac{1}{4}\left(1-\phi^4\right)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m\phi^{m+n}\langle m|n\rangle = \frac{1}{4}\left(1-\phi^4\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\phi^{2n},\\
\langle -Et|-Et\rangle &= \frac{1}{4}\left(1-\phi^4\right)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{m+n}\phi^{m+n}\langle m|n\rangle = \frac{1}{4}\left(1-\phi^4\right)\sum_{n=0}^{\infty}\phi^{2n}.
\end{aligned}$$

Entwickeln wir die normierten kohärenten Wirkungszustände des Universums nach Phasen,

$$\begin{aligned}
|Et\rangle &= \frac{1}{2}\sqrt{1-\phi^4}\sum_{n=0}^{\infty}\phi^n|n\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{1-\phi^4}\left(|0\rangle+\phi|1\rangle+\phi^2|2\rangle+\phi^3|3\rangle+\ldots\right),\\
|-Et\rangle &= \frac{1}{2}\sqrt{1-\phi^4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\phi^n|n\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{1-\phi^4}\left(|0\rangle-\phi|1\rangle+\phi^2|2\rangle-\phi^3|3\rangle+\ldots\right),
\end{aligned}$$

lassen sich durch Addition bzw. Subtraktion dieser beiden Gleichungen ein normierter gerader Katzenzustand

$$|\mathrm{cat}\rangle_e = |Et\rangle+|-Et\rangle = \sqrt{1-\phi^4}\sum_{n=0}^{\infty}\phi^{2n}|2n\rangle = \sqrt{1-\phi^4}\left(|0\rangle+\phi^2|2\rangle+\phi^4|4\rangle+\ldots\right)$$

und ein normierter ungerader Katzenzustand

$$|\mathrm{cat}\rangle_o = |Et\rangle-|-Et\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{1-\phi^4}\sum_{n=0}^{\infty}\phi^{2n+1}|2n+1\rangle = \sqrt{1-\phi^4}\left(\phi|1\rangle+\phi^3|3\rangle+\phi^5|5\rangle+\ldots\right)$$

präparieren. Wenn wir nun noch den Katzenzustand normieren, ist das Skalarprodukt gleich eins,

$$\begin{aligned}
|\mathrm{cat}|_e^2 = \langle \mathrm{cat}|\mathrm{cat}\rangle_e &= \left(1-\phi^4\right)\left(\langle 0|+\phi^2\langle 2|+\phi^4\langle 4|+\ldots\right)\left(|0\rangle+\phi^2|2\rangle+\phi^4|4\rangle+\ldots\right)\\
&= \left(1-\phi^4\right)\left(1+\phi^4+\phi^8+\ldots\right) = \left(1-\phi^4\right)\left(\langle 0|0\rangle+\phi^4\langle 2|2\rangle+\phi^8\langle 4|4\rangle+\ldots\right)\\
&= \left(1-\phi^4\right)\sum_{n=0}^{\infty}\phi^{4n} = 1.
\end{aligned}$$

Das gilt für den ungeraden Katzenzustand analog. Hierdurch bestätigen wir aber lediglich das klassische Ergebnis, das zur Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Kopenhagener Deutung führt, und dies trotz reeller Phase:

$$\frac{Et}{1-\phi^2} = \frac{\hbar}{2}\frac{1}{1-\phi}+\frac{\hbar}{2}\frac{1}{1+\phi} = \frac{\hbar}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\phi^n+\frac{\hbar}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\phi)^n = \frac{\hbar}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n\right)\phi^n = \hbar\sum_{n=0}^{\infty}\phi^{2n}.$$

Das heißt aber zugleich, daß die Schrödingergleichung nur eine Seite der Medaille ist und damit nur die halbe Wahrheit preisgibt. Die Energie kann nämlich keine zwei widersprüchlichen Lösungen beinhalten. Denn warum sollte es wohl einen Orts- und Impulsoperator geben, einen

Zeit- und Energieoperator hingegen nicht? In der Zeitdarstellung ist der Energieoperator gegeben durch

$$\hat{E} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{t} = t, \quad \hat{\hbar} = -\hat{E}\hat{t} = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} t = -\frac{\hbar}{i},$$

in der Energiedarstellung hingegen eine rein multiplikative Größe,

$$\hat{t} = i\hbar\frac{\partial}{\partial E}, \quad \hat{E} = E, \quad \hat{\hbar} = \hat{t}\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial E} E = i\hbar.$$

Lediglich die Reihenfolge der Operatoren in den beiden Darstellungen muß beachtet werden, da sie kommutativ ist,

$$\hat{\hbar} = \frac{1}{2}\left[\hat{t}\hat{E},\, \hat{E}\hat{t}\right] = i\hbar.$$

Diese kommutative Eigenschaft der Quantenmechanik erklärt sich durch die insgesamt vier Darstellungen anstatt der bisher üblichen zwei. Somit gilt in der Ortsdarstellung

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{x} = x, \quad \hat{\hbar} = -\hat{p}_x\hat{x} = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} x = i\hbar,$$

in der Impulsdarstellung hingegen

$$\hat{x} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_x}, \quad \hat{p}_x = p_x, \quad \hat{\hbar} = \hat{x}\hat{p}_x = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_x} p_x = i\hbar.$$

Die Reihenfolge der Operatoren ist wieder kommutativ,

$$\hat{\hbar} = \frac{1}{2}\left[\hat{x}\hat{p}_x,\, \hat{p}_x\hat{x}\right] = i\hbar.$$

Fassen wir nun die beiden Kommutatoren zusammen, gilt für den Wirkungsoperator

$$\hat{\hbar} = \frac{1}{4}\left[\hat{x}\hat{p}_x,\, \hat{p}_x\hat{x}\right] + \frac{1}{4}\left[\hat{t}\hat{E},\, \hat{E}\hat{t}\right] = i\hbar.$$

Diese Gleichung dürfen wir wegen $\left[\hat{x}_i\hat{p}_j,\, \hat{p}_i\hat{x}_j\right] = i\hbar\delta_{ij}$ ergänzen, so daß gilt:

$$\hat{\hbar} = \frac{1}{4}\left[\hat{x}\hat{p}_x,\, \hat{p}_x\hat{x}\right] + \frac{1}{4}\left[\hat{y}\hat{p}_y,\, \hat{p}_y\hat{y}\right] + \frac{1}{4}\left[\hat{z}\hat{p}_z,\, \hat{p}_z\hat{z}\right] + \frac{1}{4}\left[\hat{t}\hat{E},\, \hat{E}\hat{t}\right] = i\hbar.$$

Da alle Kommutatoren gleich sind,

$$\left[\hat{x}\hat{p}_x,\, \hat{p}_x\hat{x}\right] = \left[\hat{y}\hat{p}_y,\, \hat{p}_y\hat{y}\right] = \left[\hat{z}\hat{p}_z,\, \hat{p}_z\hat{z}\right] = \left[\hat{t}\hat{E},\, \hat{E}\hat{t}\right],$$

ergibt sich

$$\hat{\hbar} = \left[\hat{x}\hat{p}_x,\ \hat{p}_x\hat{x}\right] = \left[\hat{y}\hat{p}_y,\ \hat{p}_y\hat{y}\right] = \left[\hat{z}\hat{p}_z,\ \hat{p}_z\hat{z}\right] = \left[\hat{t}\hat{E},\ \hat{E}\hat{t}\right] = i\hbar.$$

Deutet man also die zweifache Welt im Sinne von Schrödingers Katze als gleichzeitiges Sein und Nichtsein, verschwindet das Imaginäre, das der Schrödingergleichung anhaftet. In der Wirkungsgleichung gibt es keine imaginären Phasen, die Phase $\phi = v/c < 1$ rotiert also nicht, wie das bei den Fockzuständen des harmonischen Oszillators der Fall ist. Ebensowenig existiert in der Wirkungsbeschreibung ein Gaußsches Wellenpaket. Der Gaußfunktion entspricht hier die doppelt quadratische Wurzelfunktion $\sqrt{1-\phi^4}$, die definitiv auf dem Schwarzschildradius endet, wohingegen die Gaußfunktion über diesen hinausgeht, da sie erst im Unendlichen verschwindet. Das ist aber nur durch die Schrödingergleichung selbst bedingt, welche solches erzwingt. Definitiv endet nämlich die Beschreibung der Welt auf dem Ereignishorizont der verschränkten Zustände. Diesen kann auch die Hawking-Strahlung nicht verlassen, noch kann sie in die Vergangenheit zurückfluktuieren.

Unser Universum befindet sich quantenphysikalisch in einem verschränkten Zustand. In einem solchen Zustand besitzen die Teiluniversen mehrere ihrer möglichen Zustände nebeneinander, wobei jedem dieser Zustände ein anderer Zustand des anderen Teiluniversums zugeordnet ist. Es erscheint paradox, daß die Welt existiert und gleichzeitig auch nicht. Im seienden All gibt es daher auch den Zustand des Todes, während es im nichtseienden auch den des Lebens gibt. Das heißt, daß neben einer infinitesimalen Singularität stets auch ein „unendlich“ ausgedehntes All existiert. Wie wir bereits früher erwähnten, gibt es neben der Punktsingularität noch eine sogenannte Randsingularität, eben jenes All, in welchem wir unser Bewußtsein besitzen, analog zum Gedankenexperiment von Schrödingers Katze. Jetzt begreifen wir, daß nicht Energie und Zeit[3] die fundamentalen Größen sind, sondern deren Produkt, die aus beiden Größen zusammengesetzte Wirkung. Es muß also neben der Schrödingergleichung noch eine zweite fundamentale Differentialgleichung geben, die nicht nach Ort und Zeit differenziert, sondern nach Impuls und Energie, was für uns völlig unanschaulich ist, da wir nicht in dieser Parallelwelt leben. Insofern hatten Einstein, Podolsky und Rosen wohl doch recht mit ihrer Annahme, daß die Quantenmechanik verborgene Variablen enthält,[4] denn niemals ist ein Naturgesetz entdeckt worden, das komplexe Zahlen gleichwertig neben die reellen stellt, was jeglicher Anschauung entbehrt. Jene zweite Welt kann damit nur der reziproke Raum sein, dessen Einbeziehung erst mehrere Welten ermöglicht. Der fundamentale Fehler, den die Quantenmechanik begeht, steckt ganz offensichtlich in der Normierung und damit in der Beschränkung auf mikroskopische Werte. Es hat jedoch niemals ein Naturgesetz gegeben, das nicht universell wäre und auch im Makroskopischen gilt. Insofern begibt sich die Kopenhagener Deutung bewußt in den Bereich der Meßungenauigkeiten, wodurch sich Einstein zu der Aussage hinreißen ließ: „Die Natur macht keine Sprünge.“ Natürlich liefert die Statistik ebenso Wahrheiten, aber nur, wenn viele Teilchen beteiligt sind und die Messung hinreichend oft wiederholt wird. Die Quantenmechanik als solche wurde aus Erklärungsnot zur Statistik verurteilt, die a priori nicht vorhanden sein muß. Deswegen kann aber nicht alles, was die Quantenmechanik geleistet hat, in

[3] bzw. Impuls und Raum

[4] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen: *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, Phys. Rev. 47 (1935), S. 777–780.

Frage gestellt werden. Das Beispiel von Schrödingers Katze zeigt jedoch eindrucksvoll, daß sich quantenmechanische Ursachen durchaus makroskopisch auswirken können, und daß man von mehreren gleichzeitigen Zuständen nicht willkürlich einen unterdrücken darf. Die Frage des Paradoxen an der Situation stellt sich nicht, wenn wir die beiden Welten präzise auseinanderhalten, da wir ja ohnehin in derjenigen leben, deren Schleier bereits gelüftet sind, dadurch daß wir mit unserem Erwachen die Messung bereits vollzogen haben.

