Aufgabe: Wie erklären Sie jemandem, daß sich das Weltall nicht unendlich räumlich ausdehnen kann?

Beweis: Der Beweis funktioniert nicht, wenn wir eine unendliche Teilchenzahl N annehmen, weil die innere Energie U proportional zur Teilchenzahl ist und damit ebenfalls unendlich wäre. Weil sich aber die Teilchenzahl durch Normierung auf spezifische Größen eliminieren läßt, muß ein physikalisches System wie das Universum nicht notwendig abgeschlossen sein, damit die Naturgesetze gelten. Wir ersparen uns daher die Normierung auf spezifische Größen, indem wir davon ausgehen, daß der 1. und 2. Hauptsatz der Thermodynamik auch für ein unendliches Universum gelten.

Die innere Energie des Weltalls setzt sich zusammen aus einem abnehmenden Beitrag an freier Energie dF und einem wachsenden Anteil an nicht mehr verwertbarer Wärmeenergie TdS:

$$dU = dF + TdS.$$

Bezieht man den Anteil der verrichteten Expansionsarbeit $dW = -pdV$ mit ein, so lautet der 1. Hauptsatz der Thermodynamik wie folgt:

$$dU = -pdV + TdS.$$

Behandeln wir das Weltall als ideales Gas mit N Teilchen und drei Freiheitsgraden, so gilt

$$U = \frac{3}{2} NkT,$$

und bei konstanter Teilchenzahl entsprechend

$$dU = \frac{3}{2} NkdT.$$

Setzen wir dieses Differential in den 1. Hauptsatz ein, ergibt sich

$$\frac{3}{2} NkdT = -pdV + TdS.$$

Auch wenn sich das Weltall bei seiner Ausdehnung immer weiter abkühlt, kann der absolute Nullpunkt selbst in einem unendlichen Weltall niemals erreicht werden. Daher können wir beide Seiten durch T dividieren,

$$\frac{3}{2} Nk \frac{dT}{T} = -\frac{p}{T} dV + dS.$$

Für ein ideales Gas gilt die Zustandsgleichung $pV = NkT$, die eingesetzt folgenden Ausdruck liefert:

$$\frac{3}{2} Nk \frac{dT}{T} = -Nk \frac{dV}{V} + dS.$$

Das totale Entropie-Differential lautet also

$$dS = \frac{3}{2}Nk\frac{dT}{T} + Nk\frac{dV}{V},$$

Obwohl nun der absolute Nullpunkt nicht erreicht werden kann, nähert sich die Endtemperatur eines unendlich ausgedehnten Universums dennoch einer Konstanten T_S, wobei das Volumen ruhig weiter anwachsen kann,

$$\Delta S = \frac{3}{2}Nk\int_T^{T_S}\frac{dT}{T} + Nk\int_V^{V_\infty}\frac{dV}{V} = \frac{3}{2}Nk\ln\frac{T_S}{T} + Nk\ln\frac{V_\infty}{V}$$

Daher ist $dT = 0$ bzw. die Entropiezunahme folgt aus der weiteren Ausdehnungsarbeit

$$dS = Nk\frac{dV}{V}.$$

Wie groß wir V auch wählen mögen, V_∞ ist stets größer, während T immer näher an T_S rückt. Nach dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik gilt jedoch

$$dF = dU - TdS = \frac{3}{2}NkdT - TdS \le 0$$

bzw.

$$dS \ge \frac{dU}{T},$$

d.h. die Entropiezunahme folgt aus der Zunahme der inneren Energie. Im thermischen Gleichgewichtsfall eines unendlich ausgedehnten Universums ändert sich aber die freie Energie nicht mehr und es gilt das Gleichheitszeichen $dF = 0$. Die freie Energie des Alls ist aufgebraucht und die Entropieänderung ist gleich

$$dS = \frac{dU}{T} = \frac{3}{2}Nk\frac{dT}{T}.$$

Da die Temperatur auch in einem unendlich ausgedehnten Weltall nicht weiter abnehmen kann als bis zum absoluten Temperatur-Nullpunkt, folgt aus $dT = 0$ entsprechend $dS = 0$, d.h. die Entropie ändert sich ebenfalls nicht mehr, bleibt aber maximal.

Nach dem 1. Hauptsatz kann also die Entropie mit der Expansion des Universums beliebig zunehmen, was nach dem 2. Hauptsatz jedoch nicht möglich ist. Setzen wir nämlich die Entropie-Differentiale, die wir aus beiden Hauptsätzen erhalten haben, gleich, so folgt für große Ausdehnungen $(dT = 0)$ sofort, daß wegen

$$dS = Nk\frac{dV}{V} = \frac{3}{2}Nk\frac{dT}{T} = 0$$

das Volumen

$$dV = \frac{3}{2}\frac{V}{T}dT = \frac{3}{2}\frac{Nk}{p}dT = 0$$

nicht mehr weiter zunehmen kann. Die obige Gleichung besagt jedoch nichts anderes, als daß die innere Energie vollständig in Expansionsarbeit umgewandelt wurde,

$$pdV = \frac{3}{2} NkdT,$$

bzw.

$$dU = -pdV + TdS = -pdV + NkT\frac{dV}{V} = -pdV + \frac{NkT}{pV}pdV = 0,$$

womit für eine weitere Ausdehnung keine Energie mehr zur Verfügung steht. Das Universum kann sich also gar nicht in alle Ewigkeit ausdehnen, wenn keine Energie mehr nachgereicht wird.

Aus der Gleichwertigkeit beider Hauptsätze kann demnach geschlossen werden, daß sich das Weltall nur bis zu einer endlichen Größe V_S ausdehnen kann, und zwar exponentiell mit der Rate α,

$$\frac{dV}{dt} = \alpha V_S e^{-\alpha t},$$

wobei

$$V_S = \frac{4\pi}{3} R_S^3$$

das maximale Kugelvolumen des Universums mit Schwarzschildradius R_S ist, der nicht überschritten werden kann. Integrieren wir die obige Differentialgleichung, ergibt sich folgende Zeitabhängigkeit des Volumens,

$$V = \int_{V_P}^{V} dV = \alpha V_S \int_{t_P}^{t} e^{-\alpha t} dt = \alpha V_S \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \right]_{t_P}^{t} \approx V_S \left(1 - e^{-\alpha t}\right),$$

wobei

$$V_P = \frac{4\pi}{3} r_P^3 = V_S \left(1 - e^{-\alpha t_P}\right) \approx V_S \alpha t_P$$

das minimale Planck-Volumen mit Radius[1] r_P ist und

$$\alpha = \frac{V_P}{V_S t_P}$$

die sich über die Planck-Zeit t_P und die Randbedingungen definierende Expansionsrate. Die Expansion erfolgt unabhängig von der Lichtgeschwindigkeit anfangs sehr schnell und dann immer langsamer.[2]

---

[1] Der einer Planck-Länge entspricht

[2] Es ist bemerkenswert, daß die Expansion des Alls nicht von der Lichtgeschwindigkeit abhängt.

Analog kann die Planck-Temperatur T_P nur bis zu einer bestimmten Untergrenze abnehmen. Man kann zeigen, daß die Abnahme exponentiell mit derselben Rate erfolgt, mit der das Volumen zunimmt,

$$\frac{dT}{dt} = -\alpha T_P e^{-\alpha t}.$$

Daraus ergibt sich folgende Temperaturabhängigkeit:

$$T = T_P + \int_{t_P}^{t} \frac{dT}{dt} dt = T_P - \alpha T_P \int_{t_P}^{t} e^{-\alpha t} dt = T_P - \alpha T_P \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \right]_{t_P}^{t} = T_P - T_P \left(e^{-\alpha t_P} - e^{-\alpha t} \right)$$
$$= T_P \left(1 - e^{-\alpha t_P} \right) + T_P e^{-\alpha t} = T_P \left(\alpha t_P + e^{-\alpha t} \right).$$

Die Schwarzschildtemperatur T_S definieren wir als den Grenzwert

$$T_S = \lim_{t \to \infty} T = T_P \alpha t_P + \lim_{t \to \infty} T_P e^{-\alpha t} = T_P \alpha t_P$$

und den Anfangswert als Planck-Temperatur:

$$\lim_{t \to t_P} T = T_P \alpha t_P + T_P \lim_{t \to t_P} e^{-\alpha t} \approx T_P \alpha t_P + T_P \lim_{t \to t_P} \left(1 - \alpha t \right) = T_P.$$

Man erkennt, daß

$$\alpha t_P = \frac{T_S}{T_P}.$$

Integrieren wir die Entropie von den Planck-Größen bis zum Schwarzschildradius, erhalten wir für ein kontinuierlich expandierendes Universum eine stetig abnehmende Wärme,

$$\Delta S = \frac{3}{2} Nk \int_{T_P}^{T_S} \frac{dT}{T} + Nk \int_{V_P}^{V_S} \frac{dV}{V} = \frac{3}{2} Nk \ln \frac{T_S}{T_P} + Nk \ln \frac{V_S}{V_P}$$
$$= \frac{3}{2} Nk \ln \alpha t_P - Nk \ln \alpha t_P = \frac{1}{2} Nk \ln \frac{V_P}{V_S} < 0,$$

die sich aus der abnehmenden inneren Energie speist, wobei die freie Energie

$$dF = dU - TdS = \frac{3}{2} NkdT - NkT \frac{dV}{V} = 0$$

aufgebraucht wird. Dabei wird die Arbeit der Wärme des Urknalls entzogen,

$$\delta Q = T_P \Delta S = \frac{1}{2} NkT_P \ln \frac{V_P}{V_S}.$$

Die ursprüngliche Energie ist somit nur noch als Entropie vorhanden. Einfacher kann man es nicht erklären,

qed

