Aufgabe: Zeigen Sie, daß ein beschleunigt sich ausdehnendes Weltall endlich ist und einen Drehimpuls besitzt.

Beweis: Sei *m* die Masse einer Galaxie und *v* die Geschwindigkeit, mit der sie sich von uns wegbewegt. Quadrieren wir die Einsteinsche Masse-Energie-Äquivalenz

$$E = mc^2,$$

wobei m_0 die sogenannte Ruhemasse ist und *c* die Lichtgeschwindigkeit, so lautet die Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 = m^2c^4 = m_0^2c^4 + \frac{m_0^2v^2c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^{\,2}}.$$

Diesen Ausdruck können wir umformen in

$$E^2 = \frac{m_0^2c^4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^{\,2}} + \frac{m_0^2v^2c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^{\,2}} = \frac{m_0^2c^4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+m_0^2v^2c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^{\,2}} = m^2c^2\left(c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+v^2\right)$$

bzw.

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} = m^2c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\mathbf{e}_y^2 + \frac{m_0^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\mathbf{e}_x^2,$$

mit den Komponentenvektoren

$$\mathbf{p}_x = \frac{m_0v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\mathbf{e}_x, \quad \mathbf{p}_y = mc\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\mathbf{e}_y,$$

aus denen nach Quadrieren von $\mathbf{p} = \mathbf{p}_x + \mathbf{p}_y$ wegen der Orthogonalität der Vektoren $\mathbf{p}_x \cdot \mathbf{p}_y = 0$ wieder die Energie-Impuls-Beziehung folgt:

$$\mathbf{p}^2 = \left(\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_y\right)^2 = \mathbf{p}_x^2 + 2\mathbf{p}_x \cdot \mathbf{p}_y + \mathbf{p}_x^2 = p_x^2 + p_x^2 = p^2.$$

Ersetzen wir nun die Geschwindigkeit *v* durch eine rein radiale Geschwindigkeit

$$v = u_x = \frac{gt}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}},$$

wobei *g* eine konstante Beschleunigung ist, so muß wegen

$$E^2 = p^2c^2 = p^2\left(\left(c^2 - v^2\right) + v^2\right) = p^2\left(\left(c^2 - u_x^2\right) + u_x^2\right) = p^2\left(u_y^2 + u_x^2\right),$$

gelten: $u_y^2 + u_x^2 = c^2$. Ferner läßt sich die Energie-Impuls-Beziehung wegen

$$u_y^2 = c^2 - \frac{g^2t^2}{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}} = \frac{c^2}{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}}$$

wie folgt schreiben:

$$E^2 = m^2c^2\left(u_y^2 + u_x^2\right) = m^2c^2\left[c^2\left(1 + \frac{g^2t^2}{c^2}\right)^{-1} + g^2t^2\left(1 + \frac{g^2t^2}{c^2}\right)^{-1}\right].$$

Wir können daher die Energien auch in zeitabhängigen Impulsen angeben,

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} = m^2\left[c^2\left(1 + \frac{g^2t^2}{c^2}\right)^{-1} + g^2t^2\left(1 + \frac{g^2t^2}{c^2}\right)^{-1}\right] = p_y^2 + p_x^2,$$

mit

$$p_x = \frac{mgt}{\sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}}}, \quad p_y = \frac{mc}{\sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}}}.$$

In Vektornotation ist

$$\mathbf{p}_x = \frac{mgt}{\sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}}}\mathbf{e}_x, \quad \mathbf{p}_y = \frac{mc}{\sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}}}\mathbf{e}_y.$$

Die Schreibweise hat den Vorteil, daß die Kraft auch vektoriell angegeben werden kann:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_x}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_y}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{mgt}{\sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}}}\mathbf{e}_x + \frac{d}{dt}\frac{mc}{\sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}}}\mathbf{e}_y.$$

Da die Masse zeitabhängig ist, folgt weiter

$$\mathbf{F} = \frac{dm}{dt}\frac{\left(gt\mathbf{e}_x + c\mathbf{e}_y\right)}{\sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}}} + \frac{mg}{\sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}}}\mathbf{e}_x + mgt\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}}}\mathbf{e}_x + mc\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}}}\mathbf{e}_y.$$

Die Ableitung der Masse

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0\frac{d}{dt}\sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}} = \frac{m_0 g}{c^2}\frac{gt}{\sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}}}$$

und des Nenners der Kraft

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}}=-\frac{g^2t}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}^3}$$

liefert uns den Ausdruck

$$\mathbf{F}=m_0g\frac{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}}\mathbf{e}_x+m_0g\frac{\frac{g^2t^2}{c^2}}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}^2}\mathbf{e}_x-m_0g\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}\frac{\frac{g^2t^2}{c^2}}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}^3}\mathbf{e}_x$$
$$+m_0g\frac{\frac{gt}{c}}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}^2}\mathbf{e}_y-m_0g\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}\frac{\frac{gt}{c}}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}^3}\mathbf{e}_y.$$

Bis auf den ersten heben sich alle Terme weg, so daß $\mathbf{F}=m_0g\mathbf{e}_x$. Die Kraft ist also nicht mehr explizit zeit- oder geschwindigkeitsabhängig. Dieses Ergebnis kann man auch noch auf andere Weise erzielen, indem man nämlich zuerst nach v ableitet:

$$\mathbf{F}=\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\frac{d\mathbf{p}_x}{dt}+\frac{d\mathbf{p}_y}{dt}=m_0\frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\mathbf{e}_x+\frac{d}{dt}mc\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\mathbf{e}_y.$$

Führen wir die Differentiationen aus, folgt zunächst

$$\mathbf{F}=m_0v\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\mathbf{e}_x+\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dv}{dt}\mathbf{e}_x+m_0c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\mathbf{e}_y+\frac{m_0c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\mathbf{e}_y$$
$$=\frac{m_0\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^3}\frac{dv}{dt}\mathbf{e}_x+\frac{m_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^3}\frac{dv}{dt}\mathbf{e}_x+\frac{v}{c^2}\frac{m_0c}{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{dv}{dt}\mathbf{e}_y-\frac{v}{c^2}\frac{m_0c}{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{dv}{dt}\mathbf{e}_y.$$

Da die y-Komponente der Kraft keinen Beitrag leistet, verbleibt lediglich ein Term in x-Richtung,

$$\mathbf{F}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^3}\frac{dv}{dt}\mathbf{e}_x,$$

und wenn wir die Geschwindigkeit noch nach der Zeit t differenzieren,

$$\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{gt}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}}=\frac{g}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}}-\frac{g^2t^2}{c^2}\frac{g}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}^3}=\frac{g}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}^3}=g\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^3,$$

erhalten wir dasselbe Resultat wie bei der explizit zeitabhängigen Lösung:

$$\mathbf{F}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^3}\frac{dv}{dt}\mathbf{e}_x=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^3}g\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^3\,\mathbf{e}_x=m_0g\mathbf{e}_x.$$

Dabei ist

$$g=\frac{v}{t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{v^2}{vt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{v^2}{r\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

die Zentrifugalbeschleunigung und

$$\mathbf{F}=m_0g\mathbf{e}_x=\frac{m_0v^2}{r\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\mathbf{e}_x=\frac{mv^2}{r}\mathbf{e}_x$$

die Zentrifugalkraft. Wenn

$$\mathbf{F}_g=-m\frac{GM}{r^2}\mathbf{e}_x$$

die Gravitationskraft angibt, dann gilt im Gleichgewichtszustand

$$\mathbf{F}_g+\mathbf{F}_z=-m\frac{GM}{r^2}\mathbf{e}_x+m\frac{v^2}{r}\mathbf{e}_x=0,$$

wobei M die Masse des Universums, G die Gravitationskonstante und r der Abstand von der Singularität ist. Nach Kürzen der Masse und des Radius folgt

$$\left(\frac{GM}{r}-v^2\right)\mathbf{e}_x=0\quad\text{bzw.}\quad v^2=\frac{GM}{r}.$$

Mit Erreichen der Lichtgeschwindigkeit geht der Radius in den Schwarzschildradius $r=R_S$ über, und wir erhalten den linearen Zusammenhang zwischen Schwarzschildradius und Masse eines rotierenden Schwarzen Lochs,

$$R_S=\frac{GM}{c^2}.$$

Die Rotation des Alls folgt also direkt aus der Speziellen Relativitätstheorie. Nimmt die radiale Ausdehnungsgeschwindigkeit auf Lichtgeschwindigkeit zu, so nimmt die transversale auf null ab. Das All startet mit minimalem Impuls in x-Richtung bei maximalem Impuls in y-Richtung, der ein Drehimpuls ist. Mit steigender Radialgeschwindigkeit nimmt der lineare Impuls bis auf seinen Maximalwert zu, während der transversale auf null abnimmt. Da der Schwarzschildradius nicht überschritten werden kann, kann daraus nur die Schlußfolgerung gezogen werden, daß sich der lineare Impuls relativistisch in einen Drehimpuls umwandelt. Damit ist zugleich der unendlichen Ausdehnung des Alls eine Grenze gesetzt, und zwar durch den Schwarzschildradius, auf welchem Kräftegleichgewicht zwischen Gravitationskraft und Zentrifugalkraft herrscht. Je größer nun der Abstand von der Singularität wird, desto geringer wird die Kreisfrequenz

$$\omega^2 = \frac{GM}{r^3}$$

und desto langsamer rotiert das All. Umgekehrt erhöht sich die Rotationsfrequenz mit sinkendem Abstand. In der Singularität wird sie unendlich.

Da ein Massezuwachs des Universums niemals beobachtet wurde, ist der Schwarzschildradius eine Obergrenze für die Ausdehnung des Alls, und das All ist somit endlich. Wer dieser Schlußfolgerung widerspricht, muß erklären können, wo die zusätzliche Masse herkommen soll, wenn die Expansion des Alls für $v = c$ bzw.

$$g = \frac{GM}{R_S^2} = \frac{c^2}{R_S}$$

aufhört. Lösen wir diesen Ausdruck nach dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit auf und multiplizieren ihn mit der Ruhemasse m_0 unserer Galaxis, so ist deren Energie gegeben durch

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \sqrt{1 + \frac{g^2 t^2}{c^2}} c^2 \approx m_0 g c T_S = m_0 g R_S = m_0 \frac{c^2}{R_S} R_S = m_0 \omega^2 R_S^2.$$

Aus dem Trägheitsmoment $\Theta = m_0 R_S^2$ folgt der Drehimpuls $L = \Theta\omega = m_0 R_S^2 \omega$ und damit die Ruheenergie mit einer sehr langsamen Rotation,

$$E_0 = m_0 \omega^2 R_S^2 = L\omega.$$

Aufgrund der Beziehung

$$R_S = \frac{GM}{c^2} = cT_S$$

können wir allein aus der Masse des Universums das Weltalter T_S bestimmen[1],

$$T_S = \frac{GM}{c^3} = \frac{6,673 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2kg^{-2}} \cdot 4 \cdot 10^{53}\,\mathrm{kg}}{2,998^3 \cdot 10^{24}\,\mathrm{m^3s^{-3}}} = 9,92 \cdot 10^{17}\,\mathrm{s} = 31,45 \cdot 10^9\,\mathrm{a}.$$

Da uns das sichtbare Universum nur ein Viertel des gesamten Universums überblicken läßt, muß die Masse noch mit dem Faktor 4 multipliziert werden. Dies folgt unmittelbar aus dem Verhältnis der Oberflächen von Kugelkappe und ganzer Kugel:

[1] In Analogie zum Schwarzschildradius

$$\frac{S_{Kugelkappe}}{S_{Kugel}} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}.$$

Durch nochmalige Multiplikation mit c ergibt sich der Schwarzschildradius des Universums:

$$R_S = \frac{GM}{c^2} = \frac{6,673 \cdot 10^{-11}\,\text{Nm}^2\text{kg}^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{53}\,\text{kg}}{2,998^2 \cdot 10^{16}\,\text{m}^2\text{s}^{-2}} = 2,97 \cdot 10^{26}\,\text{m} = 31,4 \cdot 10^9\,\text{Lj}.$$

Mit der Ruhemasse unserer Galaxis[2] von

$$m_0 = 1,5 \cdot 10^{12} \cdot 1,989 \cdot 10^{30}\,\text{kg} = 2,98 \cdot 10^{42}\,\text{kg}$$

ergibt sich eine Energie von

$$E = m_0 c^2 = 2,98 \cdot 10^{42}\,\text{kg} \cdot 2,998^2 \cdot 10^{16}\,\text{m}^2\text{s}^{-2} = 2,68 \cdot 10^{59}\,\text{J},$$

eine Kreisfrequenz von

$$\omega = \frac{c}{R_S} = \frac{2,998 \cdot 10^8\,\text{m s}^{-1}}{2,97 \cdot 10^{26}\,\text{m}} = 1,01 \cdot 10^{-18}\,\text{s}^{-1}$$

und ein Drehimpuls von

$$L = \frac{E}{\omega} = 2,65 \cdot 10^{77}\,\text{Nms}.$$

Aus Sicht der Relativitätstheorie ist das All nicht unendlich, sondern setzt sich aus zwei kinetischen Anteilen zusammen, einer linearen kinetischen Energie und einer Rotationsenergie, die mit der Ausdehnung wie eine potentielle Energie abnimmt. Da die Energie konstant ist und die kinetische Energie bei null beginnt, kann die Rotationsenergie ebenfalls niemals größer werden als die Ruheenergie. Durch die Umwandlung von potentieller Rotationsenergie in kinetische entsteht ein Oszillationsprozeß, der auch ohne Urknall auskommt, weil der Schwarzschildradius eine universelle Konstante ist, die nur von der konstanten Gesamtmasse des Universums abhängt. Daher stellt sich die berechtigte Frage, ob es diesen Urknall jemals gegeben hat. Aber das ist eine andere Geschichte.

[2] Man kann sich das Universum aus endlich vielen Galaxien aufgebaut denken, für die alle die gleichen Überlegungen gelten.

