Aufgabe: Leiten Sie die Bewegungsgleichungen des Alls in Kugelkoordinaten her.

Beweis: Ehe wir die Aufgabe angehen können, müssen wir zuerst eine Transformation des kartesischen in ein sphärisches Koordinatensystem vornehmen. Sei $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ der Ortsvektor vom Mittelpunkt des Weltalls zu irgendeiner fernen Galaxie. Ersetzen wir die kartesischen Koordinaten

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

im Ortsvektor,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = r\left(\sin\theta\cos\varphi\mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{e}_y + \cos\theta\mathbf{e}_z\right) = r\mathbf{e}_r$$

folgen durch partielles Ableiten nach r, θ und φ die Einheitsvektoren des entsprechenden Kugelkoordinatensystems:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{e}_y + \cos\theta\mathbf{e}_z, \\
\mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \cos\theta\cos\varphi\mathbf{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\mathbf{e}_y - \sin\theta\mathbf{e}_z, \\
\mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\mathbf{e}_x + \cos\varphi\mathbf{e}_y.
\end{aligned}$$

Die zeitlichen Ableitungen dieser Vektoren nach der Zeit sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{e}}_r &= \dot\theta\left(\cos\theta\cos\varphi\mathbf{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\mathbf{e}_y - \sin\theta\mathbf{e}_z\right) + \dot\varphi\sin\theta\left(-\sin\varphi\mathbf{e}_x + \cos\varphi\mathbf{e}_y\right), \\
\dot{\mathbf{e}}_\theta &= -\dot\theta\left(\sin\theta\cos\varphi\mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{e}_y + \cos\theta\mathbf{e}_z\right) + \dot\varphi\cos\theta\left(-\sin\varphi\mathbf{e}_x + \cos\varphi\mathbf{e}_y\right), \\
\dot{\mathbf{e}}_\varphi &= -\dot\varphi\left(\cos\varphi\mathbf{e}_x + \sin\varphi\mathbf{e}_y\right).
\end{aligned}$$

Um alle Vektoren in Kugelkoordinaten angeben zu können, benötigen wir noch die Darstellung der kartesischen Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_x &= \sin\theta\cos\varphi\mathbf{e}_r + \cos\theta\cos\varphi\mathbf{e}_\theta - \sin\varphi\mathbf{e}_\varphi, \\
\mathbf{e}_y &= \sin\theta\sin\varphi\mathbf{e}_r + \cos\theta\sin\varphi\mathbf{e}_\theta + \cos\varphi\mathbf{e}_\varphi, \\
\mathbf{e}_z &= \cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta
\end{aligned}$$

bzw. eigentlich die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
\cos\varphi\mathbf{e}_x &= \sin\theta\cos^2\varphi\mathbf{e}_r + \cos\theta\cos^2\varphi\mathbf{e}_\theta - \sin\varphi\cos\varphi\mathbf{e}_\varphi, \\
\sin\varphi\mathbf{e}_y &= \sin\theta\sin^2\varphi\mathbf{e}_r + \cos\theta\sin^2\varphi\mathbf{e}_\theta + \sin\varphi\cos\varphi\mathbf{e}_\varphi,
\end{aligned}$$

denn nur dann ist

$$\cos\varphi\mathbf{e}_x + \sin\varphi\mathbf{e}_y = \sin\theta\mathbf{e}_r + \cos\theta\mathbf{e}_\theta.$$

Damit erhalten wir die Ableitungen der sphärischen Einheitsvektoren in endgültiger Notation:

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\mathbf{e}_\varphi, \quad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\mathbf{e}_\varphi, \quad \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\sin\theta\mathbf{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\mathbf{e}_\theta.$$

Sei $\mathbf{u} = u_r\mathbf{e}_r + u_\theta\mathbf{e}_\theta + u_\varphi\mathbf{e}_\varphi$ der Geschwindigkeitsvektor in sphärischen Koordinaten. Dann ist die Beschleunigung gegeben durch

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \dot{u}_r\mathbf{e}_r + u_r\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{u}_\theta\mathbf{e}_\theta + u_\theta\dot{\mathbf{e}}_\theta + \dot{u}_\varphi\mathbf{e}_\varphi + u_\varphi\dot{\mathbf{e}}_\varphi = \dot{u}_r\mathbf{e}_r + u_r\left(\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\mathbf{e}_\varphi\right)\\ &+\dot{u}_\theta\mathbf{e}_\theta + u_\theta\left(-\dot{\theta}\mathbf{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\mathbf{e}_\varphi\right) + \dot{u}_\varphi\mathbf{e}_\varphi + u_\varphi\left(-\dot{\varphi}\sin\theta\mathbf{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\mathbf{e}_\theta\right)\\ &= \left(\dot{u}_r - u_\theta\dot{\theta} - u_\varphi\dot{\varphi}\sin\theta\right)\mathbf{e}_r + \left(u_r\dot{\theta} + \dot{u}_\theta - u_\varphi\dot{\varphi}\cos\theta\right)\mathbf{e}_\theta + \left(\dot{u}_\varphi + u_r\dot{\varphi}\sin\theta + u_\theta\dot{\varphi}\cos\theta\right)\mathbf{e}_\varphi.\end{aligned}$$

Das Skalarprodukt zwischen Geschwindigkeit und Beschleunigung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt} &= u_r\left(\dot{u}_r - u_\theta\dot{\theta} - u_\varphi\dot{\varphi}\sin\theta\right) + u_\theta\left(u_r\dot{\theta} + \dot{u}_\theta - u_\varphi\dot{\varphi}\cos\theta\right) + u_\varphi\left(\dot{u}_\varphi + u_r\dot{\varphi}\sin\theta + u_\theta\dot{\varphi}\cos\theta\right)\\ &= u_r\dot{u}_r + u_\theta\dot{u}_\theta + u_\varphi\dot{u}_\varphi.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck muß verschwinden, da die Lichtgeschwindigkeit c konstant ist:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt} &= u_r\dot{u}_r + u_\varphi\dot{u}_\varphi + u_\theta\dot{u}_\theta = u_r\frac{du_r}{dt} + u_\varphi\frac{du_\varphi}{dt} + u_\theta\frac{du_\theta}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\left(u_r^2 + u_\theta^2 + u_\varphi^2\right)}{dt}\\ &= \frac{1}{2}\frac{du^2}{dt} = u\frac{du}{dt} = c\frac{dc}{dt} = 0.\end{aligned}$$

Geschwindigkeit und Kraft stehen also im Weltall senkrecht zueinander. Ferner erfolgt die Zentralkraftbewegung wie im euklidischen Raum auch im All in einer Ebene, womit die Gleichung

$$u^2 = u_r^2 + u_\theta^2 + u_\varphi^2 = c^2$$

mittels $u_\theta = 0$ in den einfacheren Ausdruck $u_r^2 + u_\varphi^2 = c^2$ übergeht. Die Bewegungsgleichungen einer Galaxie der Masse m und der Ruhemasse m_0 lassen sich damit aus dem relativistischen Kraftgesetz $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ durch Ableitung des Impulses $\mathbf{p}$ herleiten:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}m\mathbf{u} = m\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{u}\frac{dm}{dt} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{d\mathbf{u}}{dt} + m_0\mathbf{u}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\\ &= \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{d\mathbf{u}}{dt} + m_0\mathbf{u}\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}^3}\frac{1}{c^2}\frac{du^2}{du}\frac{du}{dt}.\end{aligned}$$

Mit dem totalen Differential

$$du = \frac{\partial u}{\partial u_r}du_r + \frac{\partial u}{\partial u_\theta}du_\theta + \frac{\partial u}{\partial u_\varphi}du_\varphi$$

können wir die totale Ableitung berechnen, und mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial u_r} = \frac{\partial}{\partial u_r}\sqrt{u_r^2 + u_\theta^2 + u_\varphi^2} = \frac{1}{2\sqrt{u_r^2 + u_\theta^2 + u_\varphi^2}}\frac{\partial u_r^2}{\partial u_r} = \frac{u_r}{u},$$

$$\frac{\partial u}{\partial u_\theta} = \frac{\partial}{\partial u_r}\sqrt{u_r^2 + u_\theta^2 + u_\varphi^2} = \frac{1}{2\sqrt{u_r^2 + u_\theta^2 + u_\varphi^2}}\frac{\partial u_\theta^2}{\partial u_r} = \frac{u_\theta}{u},$$

$$\frac{\partial u}{\partial u_\varphi} = \frac{\partial}{\partial u_r}\sqrt{u_r^2 + u_\theta^2 + u_\varphi^2} = \frac{1}{2\sqrt{u_r^2 + u_\theta^2 + u_\varphi^2}}\frac{\partial u_\varphi^2}{\partial u_\varphi} = \frac{u_\varphi}{u}$$

ergibt sich die Kraft zu

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{d\mathbf{u}}{dt} + m_0\mathbf{u}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}^3}\frac{1}{c^2}u\left(\frac{\partial u}{\partial u_r}\frac{du_r}{dt} + \frac{\partial u}{\partial u_\theta}\frac{du_\theta}{dt} + \frac{\partial u}{\partial u_\varphi}\frac{du_\varphi}{dt}\right) \\ &= \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}^3}\frac{1}{c^2}\left(u_r\frac{du_r}{dt} + u_\theta\frac{du_\theta}{dt} + u_\varphi\frac{du_\varphi}{dt}\right)\mathbf{u}.\end{aligned}$$

Wegen $\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}} = 0$ brauchen wir uns um den geschwindigkeitsproportionalen Term nicht weiter zu kümmern, denn es gilt in der Relativitätstheorie trotz Massenveränderlichkeit wie in der Newtonschen Mechanik

$$\mathbf{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\dot{\mathbf{u}} + \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}^3}\frac{\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}}}{c^2}\mathbf{u} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\dot{\mathbf{u}} = m\mathbf{a}.$$

Unter Verwendung der Relation $u^2 = u_r^2 + u_\theta^2 + u_\varphi^2$ kann man den relativistischen Term wahlweise schreiben als

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u_r^2 + u_\theta^2 + u_\varphi^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2 - u_\varphi^2 - u_\theta^2}{c^2} - \frac{u_r^2}{c^2}}} \approx \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v}{c^2}}},$$

wenn $u_\theta = 0$ und $u_\varphi \ll c,$ also auf dem Schwarzschildradius bei maximaler Ausdehnung des Raums, oder als

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u_r^2 + u_\theta^2 + u_\varphi^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2 - u_r^2 - u_\theta^2}{c^2} - \frac{u_\varphi^2}{c^2}}} \approx \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

wenn $u_\theta = 0$ und $u_r \ll c,$ also in der Nähe der Singularität kurz nach dem „Urknall.“ Wenn sich die radiale Komponente in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit bewegt, geht die transversale gegen Null, ist hingegen die Rotationsgeschwindigkeit maximal, sinkt die radiale auf Null ab. Es gilt also stets in der einen oder anderen Näherung

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u_r^2+u_\theta^2+u_\varphi^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Im Falle einer beschleunigten Ausdehnung des Alls ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit v nicht konstant, sondern eine Funktion der Zeit. Aufgrund astronomischer Beobachtungen weiß man, daß die Geschwindigkeit, mit der sich andere Galaxien von uns wegbewegen, um so größer ist, je weiter sie von uns entfernt sind. Sei g eine im bewegten System einer fernen Galaxie gemessene konstante Beschleunigung, dann erhält man die in unserer Galaxis gemessene Radialgeschwindigkeit dieser Galaxie gemäß

$$v(t)=\dot{r}(t)=\frac{gt}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}},$$

und ihre Radialbeschleunigung nach Differentiation zu

$$\begin{aligned}\dot{v}(t)=\ddot{r}(t)&=\frac{d}{dt}\frac{gt}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}}=\frac{g}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}}-\frac{g^2t}{c^2}\frac{gt}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}^{\,3}}\\&=g\frac{1+\frac{g^2t^2}{c^2}-\frac{g^2t^2}{c^2}}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}^{\,3}}=\frac{g}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}^{\,3}}.\end{aligned}$$

Aus den Additionstheoremen

$$u_x=\frac{u_x'+v}{1+\frac{v}{c^2}u_x'},\quad u_y=\frac{u_y'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v}{c^2}u_x'},\quad u_z=\frac{u_z'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v}{c^2}u_x'}$$

folgt, daß

$$u^2=\frac{u_x'^2+2u_x'v+v^2+\left(u_y'^2+u_z'^2\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{v}{c^2}u_x'\right)^2}=c^2+\frac{\left(u_x'^2+u_y'^2+u_z'^2-c^2\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{v}{c^2}u_x'\right)^2}.$$

Wegen $u(0)=\sqrt{u_x'^2+u_y'^2+u_z'^2}$ und $u(c)=c,$ ist $u'^2=u_x'^2+u_y'^2+u_z'^2=c^2$ und damit auch

$$u^2=u_x^2+u_y^2+u_z^2=c^2,$$

weil die Messung der Lichtgeschwindigkeit unabhängig vom Bezugssystem ist. Ein Beobachter in der Singularität mit $v=0$ mißt für u eine reine Transversalgeschwindigkeit, und zwar $u=\sqrt{u_y'^2+u_z'^2}$, ein Beobachter auf dem Schwarzschildradius, wenn $v=c$ ist und das All sich nicht mehr weiter ausdehnt, eine reine Longitudinalgeschwindigkeit. In sphärischen Koordinaten gilt, wie wir gesehen haben,

$$u^2 = u_r^2 + u_\theta^2 + u_\varphi^2 = c^2,$$

so daß wir mit $u_\theta = 0$ und $u_r = \dot{r}$ die Transversalgeschwindigkeit u_φ ableiten können,

$$u_\varphi = \sqrt{c^2 - u_r^2} = \sqrt{c^2 - \frac{g^2t^2}{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}} = c\sqrt{1 - \frac{g^2t^2}{c^2}\frac{1}{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}},$$

die aufgrund der Relation

$$v_r = \frac{gt}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}} = v$$

auch die Gestalt

$$u_\varphi = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = c\sqrt{1-\frac{v_r^2}{c^2}}$$

annehmen kann. Insgesamt ergeben sich in der Zeitabhängigkeit die Geschwindigkeiten

$$u_r = \frac{gt}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}}, \quad u_\theta = 0, \quad u_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}}.$$

Leiten wir diese Größen zeitlich ab, ergeben sich die Beschleunigungen

$$\dot{u}_r = \frac{d}{dt}\frac{gt}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}} = \frac{g}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}} - \frac{g^2t}{c^2}\frac{gt}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}^3} = g\frac{1+\frac{g^2t^2}{c^2}-\frac{g^2t^2}{c^2}}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}^3} = \frac{g}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}^3}$$

und

$$\dot{u}_\varphi = \frac{du_\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{c}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}} = -\frac{g}{c}\frac{gt}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}^3}.$$

Daß Geschwindigkeit und Beschleunigung aufeinander senkrecht stehen, erhellt aus

$$\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}} = u_r\dot{u}_r + u_\theta\dot{u}_\theta + u_\varphi\dot{u}_\varphi = \frac{gt}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}}\frac{g}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}^3} - \frac{g}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}}\frac{gt}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}^3} = 0.$$

Damit kann das vollständige Kraftgesetz hergeleitet werden:

$$\mathbf{F} = m_0\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}\dot{\mathbf{u}} = m_0\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}\Big[\left(\dot{u}_r - u_\theta\dot{\theta} - u_\varphi\dot{\varphi}\sin\theta\right)\mathbf{e}_r + \left(u_r\dot{\theta} + \dot{u}_\theta - u_\varphi\dot{\varphi}\cos\theta\right)\mathbf{e}_\theta$$
$$+\left(\dot{u}_\varphi + u_r\dot{\varphi}\sin\theta + u_\theta\dot{\varphi}\cos\theta\right)\mathbf{e}_\varphi\Big].$$

Wir legen nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit einen konstanten Winkel $\theta = \pi/2$ zugrunde, womit sich die Kraft durch Entfallen der Polarkomponente a_θ deutlich vereinfacht:

$$\mathbf{F} = m_0\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}\dot{\mathbf{u}} = m_0\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}\Big[\left(\dot{u}_r - u_\varphi\dot{\varphi}\right)\mathbf{e}_r + \left(\dot{u}_\varphi + u_r\dot{\varphi}\right)\mathbf{e}_\varphi\Big].$$

Setzen wir die oben erhaltenen Größen ein, so ergibt sich die zeitabhängige Kraft

$$\mathbf{F} = m_0\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}\left[\left(g\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}^{\,-3} - u_\varphi\dot{\varphi}\right)\mathbf{e}_r + \left(-g\frac{gt}{c}\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}^{\,-3} + u_r\dot{\varphi}\right)\mathbf{e}_\varphi\right]$$
$$= m_0 g\left[\left(1+\frac{g^2t^2}{c^2}\right)^{-1} - \frac{c\dot{\varphi}}{g}\right]\left(\mathbf{e}_r - \frac{gt}{c}\mathbf{e}_\varphi\right)$$

mit den beiden Komponenten

$$\mathbf{F}_r = \frac{m_0 g}{1+\dfrac{g^2t^2}{c^2}}\left(1-\frac{c\dot{\varphi}}{g}\left(1+\frac{g^2t^2}{c^2}\right)\right)\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{F}_\varphi = -\frac{m_0 g}{1+\dfrac{g^2t^2}{c^2}}\frac{gt}{c}\left(1-\frac{c\dot{\varphi}}{g}\left(1+\frac{g^2t^2}{c^2}\right)\right)\mathbf{e}_\varphi$$

und dem Betrag

$$|\mathbf{F}| = \frac{m_0 g}{\sqrt{1+\dfrac{g^2t^2}{c^2}}}\left|1-\frac{c\dot{\varphi}}{g}\left(1+\frac{g^2t^2}{c^2}\right)\right|.$$

Zur Schwarzschildzeit $t = T_S$ ist

$$\mathbf{F}(T_S) = \mathbf{F}_r(T_S) \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_\varphi(T_S) = 0,$$

d.h.

$$\mathbf{F}(T_S) = \frac{m_0 g}{1+\dfrac{g^2T_S^2}{c^2}}\left(1-\frac{c\dot{\varphi}(T_S)}{g}\left(1+\frac{g^2T_S^2}{c^2}\right)\right)\mathbf{e}_r = 0,$$

da

$$1-\frac{c\dot{\varphi}(T_S)}{g}\left(1+\frac{g^2T_S^2}{c^2}\right) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \dot{\varphi}(T_S) = \frac{g}{c}\frac{1}{1+\dfrac{g^2T_S^2}{c^2}} \approx \frac{c}{gT_S^2} = \frac{1}{T_S} \approx 0.$$

Zur Zeit $t = 0$ wiederum ist

$$\mathbf{F}_r(0) = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{F}(0) = \mathbf{F}_\varphi(0),$$

d.h.

$$\mathbf{F}(0) = \mathbf{F}_\varphi(0) = -\frac{m_0 g}{1+\dfrac{g^2t^2}{c^2}} \frac{gt}{c}\left(1-\frac{c\dot{\varphi}(0)}{g}\left(1+\frac{g^2t^2}{c^2}\right)\right)\mathbf{e}_\varphi = 0,$$

da

$$1-\frac{c\dot{\varphi}(0)}{g}\left(1+\frac{g^2t^2}{c^2}\right) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \dot{\varphi}(0) = \frac{g}{c} = \frac{1}{T_S} \approx 0.$$

Der Drehimpuls, auch wenn er verschwindend gering ist, bleibt also während des Urknalls erhalten, da der Schwarzschildradius konstant ist. Es zeigt sich, daß beim Urknall auch keine Kräfte übertragen werden, da

$$\mathbf{F}(T_S) = \mathbf{F}(0) = 0$$

und das Weltall offenbar keiner Beschleunigung ausgesetzt ist. Vielmehr wird beim Urknall lediglich die Zeit T_S auf Null zurückgesetzt, damit das Weltall erneut starten kann. Auch wirken während des Urknalls keine unendlichen Kräfte, die das All inflationär expandieren könnten, denn es ist sowohl unmittelbar kurz vor dem Urknall

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{F}(T_S)\right| &= \frac{m_0 g}{\sqrt{1+\dfrac{g^2T_S^2}{c^2}}}\left|1-\frac{c\dot{\varphi}(T_S)}{g}\left(1+\frac{g^2T_S^2}{c^2}\right)\right| \\ &= \frac{m_0 g}{\sqrt{1+\dfrac{g^2T_S^2}{c^2}}}\left|1-\frac{c}{g}\frac{g}{c}\frac{1}{1+\dfrac{g^2T_S^2}{c^2}}\left(1+\frac{g^2T_S^2}{c^2}\right)\right| = 0\end{aligned}$$

als auch kurz danach

$$\left|\mathbf{F}(0)\right| = m_0 g\left|1-\frac{c\dot{\varphi}(0)}{g}\right| = 0.$$

Die Ansicht, daß während des Urknalls die Naturgesetze nicht mehr gelten würden und Materie aus dem Nichts erzeugt wird, ist damit widerlegt, da es für die Größe des Schwarzschildradius irrelevant ist, ob die Masse in einer punktförmigen Singularität konzentriert oder unendlich dünn auf der Oberfläche verteilt ist.

Sei M die Restmasse des Alls und G die Gravitationskonstante. Aufgrund des verschwindenden Massenverhältnisses können wir das eigentliche Zweikörperproblem wie einen rotierenden Massenpunkt auf der Umlaufbahn um das Massenzentrum behandeln. In Aufgabe [182] haben wir gezeigt, daß die Energie einer Galaxie im All gleich

$$E = mc^2 = G\frac{mM}{R_S}$$

ist. Kürzen wir die Masse der Galaxie auf beiden Seiten, wird offenkundig, daß das Produkt aus Gravitationsbeschleunigung g und Schwarzschildradius R_S und damit die Gravitationsbeschleunigung konstant ist. Integrieren wir die konstante Kraft von der Singularität bis zum Schwarzschildradius, $E = FR_S$, verschwindet im Weltall wegen der Größe des Schwarzschildradius ebenfalls die Kraft, da

$$F = G\frac{mM}{R_S^2} = mg,$$

wobei die Gravitationsbeschleunigung gegeben ist durch

$$g = \frac{GM}{R_S^2} = \frac{R_S c^2}{R_S^2} = \frac{c^2}{R_S},$$

Sie ist damit exakt gleich dem Wert der Zentrifugalbeschleunigung bei Lichtgeschwindigkeit. Für das Kräftegleichgewicht aus Gravitationskraft und Zentrifugalkraft, die einander gleich sein müssen, wenn das Universum stabil bleiben soll, gilt damit

$$F = G\frac{mM}{R_S^2} = m\frac{c^2}{R_S} \quad \text{bzw.} \quad G\frac{mM}{R_S^2} - m\frac{c^2}{R_S} = 0.$$

Der Fliehkraft der Galaxie wirkt also die Gravitationskraft genau entgegen. Ein Kollaps des Universums ist damit ausgeschlossen. Die beschleunigte Ausdehnung des Alls steht somit im Einklang mit der Relativitätstheorie und der Theorie Schwarzer Löcher. Da der Vorgang nahtlos vonstatten geht, ist ein Inflationsszenario mittels Überlichtgeschwindigkeiten in Verbindung mit einem Entstehungsprozeß von Materie eher unwahrscheinlich. Die Umwandlung von Materie in Hawking-Strahlung und das Lebensdauerproblem der Elementarteilchen sind dafür unerheblich.

