Aufgabe: Zeigen Sie, daß weder die Quantenmechanik noch die Relativitätstheorie vollständig sind, und daß beide nicht aufeinander abgestimmt sind, weil sie das Antiuniversum nicht berücksichtigen.

Beweis: Im Jahr 1935 publizierte Albert Einstein gemeinsam mit Boris Podolsky und Nathan Rosen eine bahnbrechende Arbeit, die darauf hindeutete, aber nicht bewies, daß die Wellenfunktion keine vollständige Beschreibung von Quantensystemen sein kann, wenn man am Prinzip der Lokalität festhalten will [1]. Da nach der Quantenmechanik für jedes Teilchen eines Zwei-Teichen-Systems nur jeweils eine der zwei komplementären Observablen Ort und Impuls vorhersagbar ist, sei die Quantenmechanik unvollständig, so Einstein, Podolsky und Rosen. Im Jahr 1964 stellte John Stewart Bell seine heute nach ihm benannte Bellsche Ungleichung auf und zeigte, daß sie für jede klassische Theorie gültig ist [2]. Schließlich konnte Alain Aspect 1982 demonstrieren, daß die Bellsche Ungleichung mindestens in einem Fall nachprüfbar verletzt wird, womit die Existenz lokaler verborgener Variablen ausgeschlossen werden konnte [3]. Der EPR-Effekt lieferte damit keinen Ansatzpunkt, die Quantenmechanik für unvollständig zu halten. Insbesondere wurde damit auch zugegeben, daß mindestens eine der beiden EPR-Annahmen Lokalität und Realismus nicht zutrifft und die Welt sich damit nicht vollständig klassisch beschreiben läßt. In den 1980er Jahren räumte John Stewart Bell in einem Interview mit der BBC hingegen ein, daß es eine Möglichkeit gebe, der Schlußfolgerung von Superlichtgeschwindigkeiten und Phantomaktionen aus der Ferne zu entkommen. Aber das würde im Universum absoluten Determinismus erfordern und das völlige Nichtvorhandensein eines freien Willens. Wenn wir davon ausgehen, daß die Welt superdeterministisch ist und sich nicht nur auf die leblose Natur hinter den Kulissen beschränkt, sondern auch unser Verhalten selbst vorherbestimmt, verschwindet diese Schwierigkeit.

Um den Widerspruch zwischen der relativistischen Energie und dem quantenmechanischen Drehimpuls (Spin) aufzuzeigen, nehmen wir an, daß sich das Universum mit nahezu Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. In einem ersten Schritt wollen wir zeigen, daß Energie und Drehimpuls im relativistischen Grenzfall zueinander proportional sind. Unser Ausgangspunkt ist die Äquivalenz von Masse und Energie,

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},$$

wobei m_0 die Ruhemasse ist, v die Ausdehnungsgeschwindigkeit des Alls und c die Lichtgeschwindigkeit. Quadrieren wir diese Gleichung, gelangen wir ohne Schwierigkeit zur Energie-Impuls-Relation, indem wir den Zähler mit dem Nenner multiplizieren und den abgezogenen Term sogleich wieder addieren:

$$E^2 = m^2c^4 = \frac{m_0^2 c^4}{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0^2 c^4\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right) + m_0^2 c^4 \dfrac{v^2}{c^2}}{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = m_0^2 c^4 + m^2 v^2 c^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2.$$

Dabei ist

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

der relativistische Impuls. Im Universum spielt der radiale Impuls jedoch kaum eine Rolle, sobald das All seine maximale Ausdehnung *r* erreicht hat. Vielmehr kommt es dann auf den Drehimpuls $L = rp$ an, wobei die Lichtgeschwindigkeit, wenn sich der Raum nicht mehr weiter ausdehnen kann, wegen $\dot{r} = 0$ zu einer reinen transversalen Bahngeschwindigkeit mit der Kreisfrequenz ω wird:

$$c = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2} = r\dot{\varphi} = r\omega.$$

Nach Substitution folgt die Energie-Drehimpuls-Beziehung

$$E^2 = m_0^2 c^4 + \frac{r^2 p^2 c^2}{r^2} = m_0^2 c^4 + L^2\omega^2.$$

Wegen der Lichtartigkeit des Universums können wir die Ruhemasse im Bereich der Lichtgeschwindigkeit gegenüber der gegen Unendlich gehenden relativistischen Masse vernachlässigen, d.h. $m_0 \ll m,$ womit wir einen linearen Zusammenhang zwischen Energie und Drehimpuls herstellen können: $E \approx L\omega.$ Sämtliche Herleitungen, die auf die Energie angewandt werden können, müssen damit nach Kürzung von Konstanten auch für den Drehimpuls gelten, insbesondere müssen die Drehimpulse sich wie die Energien quadratisch addieren. Die obigen Gleichungen gelten aber nicht nur im Makroskopischen, sondern wegen der Universalität der Naturgesetze auch für Elementarteilchen. Insbesondere hat der quantisierte Drehimpuls $L = \hbar$ die Energie $E = \hbar\omega.$ Wir verwenden daher im folgenden die Energie-Impuls-Relation und die Masse-Energie-Äquivalenz in der Form

$$E^2 = m^2 c^4 = L^2\omega^2 \quad \text{bzw.} \quad E = mc^2 = L\omega.$$

Wellen sind Massen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Daher hat jede physikalische Erhaltungsgröße sowohl eine Wellen- als auch eine Teilchennatur. Zweifellos gibt es im Kosmos zu jedem Teilchen ein Antiteilchen, die sich beide bei Berührung gegenseitig annihilieren. Bezeichnen wir mit dem Index 1 das Teilchen, so trägt das Antiteilchen den Index 2. Variablen ohne Index beziehen sich demnach auf das Gesamtsystem aus Teilchen und Antiteilchen. Im Doppeluniversum muß sich allerdings die Summe der Energien von Universum und Antiuniversum stets aufheben, unabhängig davon, ob die beiden Anteile gleich groß sind und welches Vorzeichen sie haben, $E = E_1 + E_2 = 0.$ Diese Auslegung ist aber nur dann richtig, wenn eine der beiden Energien und damit deren Masse negativ ist:

$$E = (m_1 + m_2)c^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad m_2 = -m_1.$$

Denn dann ist auch das Quadrat gleich null,

$$E^2 = (m_1 + m_2)^2 c^4 = (m_1^2 + 2m_1 m_2 + m_2^2)c^4 = (m_1^2 - 2m_1^2 + m_1^2)c^4 = 0,$$

wie das aufgrund des Pauli-Prinzips bei einfachen Spinsystemen $L_2 = -L_1$ stets der Fall ist:

$$L^2 = (L_1 + L_2)^2 = L_1^2 - 2L_1^2 + L_1^2 = -L_1^2 + L_1^2 = 0.$$

Addieren wie die Energien allerdings quadratisch, so werden wegen der positiven Beträge Energie- und Drehimpulserhaltung verletzt:

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 = \left(m_1^2 + m_2^2\right)c^4 = \left(L_1^2 + L_2^2\right)\omega^2 \neq 0.$$

Um die Erhaltungssätze zu erfüllen, muß also gelten:

$$E_1^2 + E_2^2 = 0, \quad m_1^2 + m_2^2 = 0, \quad L_1^2 + L_2^2 = 0,$$

d.h. die Lösungen können bei beliebiger Wahl von m_1, L_1 und E_1 nur lauten:

$$E_2 = iE_1, \quad m_2 = im_1 \quad L_2 = iL_1.$$

Damit wird das gewünschte Resultat erzielt:

$$E^2 = E_1^2 + i^2E_1^2 = \left(m_1^2 + i^2m_1^2\right)c^4 = \left(L_1^2 + i^2L_1^2\right)\omega^2 = 0.$$

Umgekehrt erhalten wir bei linearer Addition der Massen und Drehimpulse Widersprüche, wenn wir mit diesem Ansatz anschließend quadrieren:

$$E^2 = \left(E_1 + E_2\right)^2 = \left(m_1 + m_2\right)^2 c^4 = \left(1 + 2i + i^2\right)m_1^2c^4 = 2iE_1^2 = 2E_1E_2 \neq 0,$$
$$L^2 = \left(L_1 + L_2\right)^2 = \left(m_1 + m_2\right)^2 r^2v^2 = \left(1 + 2i + i^2\right)m_1^2r^2v^2 = 2iL_1^2 = 2L_1L_2 \neq 0.$$

Wenn also weder die lineare noch die quadratische Addition weiterhelfen, müssen wir einen anderen Weg einschlagen, indem wir die beiden Energien bzw. Drehimpulse quadratisch voneinander subtrahieren:

$$E_1^2 - E_2^2 = \left(m_1^2 - m_2^2\right)c^4 = \left(1 - i^2\right)m_1^2c^4 = 2E_1^2 = -2iE_1E_2,$$
$$L_1^2 - L_2^2 = \left(m_1^2 - m_2^2\right)r^2v^2 = \left(1 - i^2\right)m_1^2r^2v^2 = 2L_1^2 = -2iL_1L_2.$$

Bringen wir die rechten Terme auf die linke Seite, erhalten wir die quantenmechanisch korrekten Energien und Drehimpulse des Doppeluniversums:

$$E^2 \equiv E_1^2 + 2iE_1E_2 + i^2E_2^2 = \left(E_1 + iE_2\right)^2 = \left(1 + i^2\right)^2 E_1^2 = 0,$$
$$L^2 \equiv L_1^2 + 2iL_1L_2 + i^2L_2^2 = \left(L_1 + iL_2\right)^2 = \left(1 + i^2\right)^2 L_1^2 = 0.$$

Somit ergeben sich die komplexen Lösungen

$$E = E_1 + iE_2 = \left(1 + i^2\right)E_1 = 0, \quad \bar{E} = E_1 - iE_2 = \left(1 - i^2\right)E_1 = 2E_1,$$
$$L = L_1 + iL_2 = \left(1 + i^2\right)L_1 = 0, \quad \bar{L} = L_1 - iL_2 = \left(1 - i^2\right)L_1 = 2L_1.$$

Dabei sind E_1 und E_2 bzw. L_1 und L_2 reelle Zahlen, und nur diese Definitionen führen zu korrekten Ergebnissen. Wir konnten somit zeigen, daß die Quantenmechanik nicht vollständig ist. Fassen wir die Quadrate von Energie und Drehimpuls hingegen als Produkte zweier konjugiert-komplexer Energien bzw. Einzeldrehimpulse identischer Teilchen auf, verschwinden die Betragsquadrate und es gilt:

$$E^2 = E\overline{E} = \left(E_1 + iE_2\right)\left(E_1 - iE_2\right) = E_1^2 - i^2 E_2^2 = E_1^2 + E_2^2 = \left(1 + i^2\right)E_1^2 = 0,$$
$$L^2 = L\overline{L} = \left(L_1 + iL_2\right)\left(L_1 - iL_2\right) = L_1^2 - i^2 L_2^2 = L_1^2 + L_2^2 = \left(1 + i^2\right)L_1^2 = 0.$$

Folgende Energien und Drehimpulse sind Lösungen dieser Gleichungen:

$$\left|E_1\right| = \sqrt{E_1\overline{E}_1} = m_1c^2, \quad \left|E_2\right| = \sqrt{E_2\overline{E}_2} = m_2c^2$$

bzw.

$$\left|L_1\right| = \sqrt{L_1\overline{L}_1} = m_1rv, \quad \left|L_2\right| = \sqrt{L_2\overline{L}_2} = m_2rv.$$

Wir haben nur zusätzlich gefordert, daß die Komponenten der Energien und Drehimpulse orthogonal zueinander sein müssen, d.h.

$E_2 = iE_1$ und $E_1 = -iE_2$ bzw. $L_2 = iL_1$ und $L_1 = -iL_2$.

Damit verschwinden auch die Kommutatoren

$$\left[E_1, E_2\right] = E_1E_2 - E_2E_1 = i\left(E_1^2 + E_2^2\right) = 0,$$
$$\left[L_1, L_2\right] = L_1L_2 - L_2L_1 = i\left(L_1^2 + L_2^2\right) = 0.$$

Gesamtenergie und -drehimpuls können auch als reelle Größen ausgedrückt werden,

$$E^2 = \frac{1}{2}\left[\left(E_1 + E_2\right)^2 + \left(E_2 - E_1\right)^2\right] = E_1^2 + E_2^2 + \left[E_1, E_2\right] = 0,$$
$$L^2 = \frac{1}{2}\left[\left(L_1 + L_2\right)^2 + \left(L_2 - L_1\right)^2\right] = L_1^2 + L_2^2 + \left[L_1, L_2\right] = 0,$$

und stehen damit im Einklang mit den komplexen Ansätzen

$$E^2 = E\overline{E} = \left(E_1 - iE_2\right)\left(E_1 + iE_2\right) = E_1^2 + E_2^2 + iE_1E_2 - iE_2E_1 = E_1^2 + E_2^2 + i\left[E_1, E_2\right] = 0,$$
$$L^2 = L\overline{L} = \left(L_1 + iL_2\right)\left(L_1 - iL_2\right) = L_1^2 + L_2^2 + iL_1L_2 - iL_2L_1 = L_1^2 + L_2^2 + i\left[L_1, L_2\right] = 0.$$

Wegen der verschwindenden Kommutatoren läßt sich zeigen, daß der Energieerhaltungssatz durch die Definition

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{E_1^2 - i^2E_2^2} = \sqrt{E_1^2 - 2i^2E_2^2 + i^2E_2^2}$$
$$= \sqrt{E_1^2 + 2iE_1E_2 + i^2E_2^2} = \sqrt{\left(E_1 + iE_2\right)^2} = E_1 + iE_2$$

erfüllt wird und der Drehimpulserhaltungssatz entsprechend:

$$L = \sqrt{L_1^2 + L_2^2} = \sqrt{L_1^2 - i^2L_2^2} = \sqrt{L_1^2 - 2i^2L_2^2 + i^2L_2^2}$$
$$= \sqrt{L_1^2 + 2iL_1L_2 + i^2L_2^2} = \sqrt{\left(L_1 + iL_2\right)^2} = L_1 + iL_2.$$

Die Energie- und Drehimpulsoperatoren von Universum und Antiuniversum kommutieren also miteinander. Observablen, deren Operatoren kommutieren, können gleichzeitig mit beliebiger

Genauigkeit gemessen werden. Es erübrigt sich darauf hinzuweisen, daß auch die Einsteinsche Energie-Masse-Äquivalenz im Doppeluniversum neu gefaßt werden muß. Sie lautet

$$\begin{aligned} E_1^2 - E_2^2 &= \left(m_1^2 - m_2^2\right)c^4 = \left(1-i^2\right)m_1^2c^4 = \left(1+i\right)E_1\left(1-i\right)E_1 \\ &= -2\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+i\right)E_1\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+i\right)E_2 = -2iE_1E_2. \end{aligned}$$

Die in konjugiert-komplexer Schreibweise angegebenen relativistischen Energien

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1+i}{\sqrt{2}}m_1c^2, \quad \bar{E}_1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}m_1c^2, \\ E_2 &= \frac{1-i}{\sqrt{2}}m_2c^2, \quad \bar{E}_2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}m_2c^2 \end{aligned}$$

sind Lösungen der Gleichungen

$$\begin{aligned} E &= E_1 + iE_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+i\right)m_1c^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+i\right)i^2m_1c^2 = \left(1+i^2\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+i\right)m_1c^2 = 0, \\ \bar{E} &= E_1 - iE_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+i\right)m_1c^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+i\right)i^2m_1c^2 = \left(1-i^2\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+i\right)m_1c^2 = 2E_1, \end{aligned}$$

und die daraus gebildeten Betragsquadrate

$$\begin{aligned} E_1^2 &= E_1\bar{E}_1 = \frac{1}{2}\left(1+i\right)\left(1-i\right)m_1^2c^2 = m_1^2c^2, \\ E_2^2 &= E_2\bar{E}_2 = \frac{1}{2}\left(1+i\right)\left(1-i\right)m_2^2c^2 = m_2^2c^2 \end{aligned}$$

genügen der Energieerhaltung:

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 = E_1\bar{E}_1 + E_2\bar{E}_2 = m_1^2c^4 + m_2^2c^4 = \left(m_1^2 + m_2^2\right)c^4 = 0.$$

Analog zur Energie-Masse-Äquivalenz gilt für die Drehimpulsdifferenz

$$\begin{aligned} L_1^2 - L_2^2 &= \left(m_1^2 - m_2^2\right)r^2v^2 = \left(m_1 + m_2\right)\left(m_1 - m_2\right)r^2v^2 = \left(1+i\right)\left(1-i\right)m_1^2r^2v^2 \\ &= 2m_1^2r^2v^2 = -2im_1m_2r^2v^2 = -2iL_1L_2, \end{aligned}$$

wobei auch hier die in konjugiert-komplexer Schreibweise angegebenen relativistischen Drehimpulse

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+i\right)m_1rv, \qquad \bar{L}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-i\right)m_1rv, \\ L_2 &= iL_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+i\right)m_2rv, \quad \bar{L}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-i\right)m_2rv \end{aligned}$$

Lösungen der Gleichungen

$$L = L_1 + iL_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)m_1 rv + \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)i^2 m_1 rv = \left(1+i^2\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)m_1 rv = 0,$$
$$\bar{L} = L_1 - iL_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)m_1 rv - \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)i^2 m_1 rv = \left(1-i^2\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)m_1 rv = 2L_1$$

sind. Ähnlich genügen die Betragsquadrate

$$L_1^2 = L_1\bar{L}_1 = \frac{1}{2}(1+i)(1-i)m_1^2 r^2 v^2 = m_1^2 r^2 v^2,$$
$$L_2^2 = L_2\bar{L}_2 = \frac{1}{2}(1+i)(1-i)m_2^2 r^2 v^2 = m_2^2 r^2 v^2$$

der Drehimpulserhaltung

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 = L_1\bar{L}_1 + L_2\bar{L}_2 = m_1^2 r^2 v^2 + m_2^2 r^2 v^2 = \left(m_1^2 + m_2^2\right) r^2 v^2 = 0.$$

Wie bei der Energieerhaltung führt auch die quantenmechanische Drehimpulserhaltung

$$L_1 = m_1 rv, \quad L_2 = m_2 rv, \quad L = L_1 + L_2 = \left(m_1 + m_2\right) rv,$$

nicht zum Ziel, denn auch hier kann die lineare Addition der Drehimpulse nur zu Widersprüchen mit der Relativitätstheorie führen. Wir drücken daher die Impulse besser durch die Drehimpulse aus,

$$p_1 = \frac{L_1}{r}, \quad p_2 = \frac{L_2}{r}, \quad p = p_1 + p_2 = \frac{L_1 + L_2}{r} = \frac{L}{r},$$

und setzen diese in die Energie-Impuls-Beziehung ein. Wie erwartet verschwindet die Gesamtenergie des Doppeluniversums

$$E = pc = \left(p_1 + p_2\right)c = \frac{L_1 + L_2}{r}c = \left(m_1 v_1 + m_2 v_2\right)c$$

nur, wenn $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0,$ d.h. wegen $m_1 + m_2 = 0$ nur für $v_1 = v_2.$ Nur dann ist

$$E = \left(m_1 + m_2\right)v_1 c = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{L_1 c}{r} = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)L_1\omega = 0.$$

Damit also der Gesamtdrehimpuls zweier Fermionen identisch verschwinden kann, legt ihn die Quantenmechanik nach den Regeln der Vektoraddition widersprüchlich fest,

$$L = L_1 + L_2 = L_1 + \left(-L_1\right) = \frac{1}{2}\hbar + \left(-\frac{1}{2}\hbar\right) = 0,$$

weil sie sich damit auf negative Massen einläßt. Als Begründung führt die Quantenmechanik an, daß es für den Spin kein klassisches Analogon gäbe. Für negative Massen $m_2 = -m_1,$ wie sie zur Erklärung des Spins erforderlich wären, gibt es jedoch bislang keine Begründung. Zunächst gilt nur

$$L_1^2 = L_2^2 = \frac{1}{4}\hbar^2,$$

was formal den Anschein erweckt, daß die Welt in Ordnung sei:

$$L^2 = \left(L_1 + L_2\right)^2 = L_1^2 + 2L_1L_2 + L_2^2 = L_1^2 - 2L_1^2 + L_1^2 = \frac{1}{4}\hbar^2 - \frac{2}{4}\hbar^2 + \frac{1}{4}\hbar^2 = 0.$$

Das ist jedoch nicht zulässig, denn die folgende lineare Addition führt sofort wieder zu Widersprüchen:

$$L = L_1 + L_2 = m_1 rv + m_2 rv = \left(m_1 + m_2\right) rv \neq 0,$$

falls $m_1 + m_2 \neq 0.$ Damit diese beiden Gleichungen nicht länger im Widerspruch zueinander stehen, muß nicht etwa gelten, daß es negative Massen gibt, d.h. $m_2 = -m_1,$ sondern es muß lediglich korrekt addiert werden, da ein reeller Wert nicht zugleich komplexwertig sein kann.

Setzen wir anstatt

$$L_1 = \frac{1}{2}\hbar, \quad L_2 = -\frac{1}{2}\hbar$$

die Drehimpulse des Doppeluniversums

$$L_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+i\right)\frac{\hbar}{2}, \quad L_2 = iL_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+i\right)\frac{i\hbar}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-i\right)\frac{\hbar}{2}$$

und ihr Komplex-konjugiertes

$$\bar{L}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-i\right)\frac{\hbar}{2}, \quad \bar{L}_2 = -i\bar{L}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-i\right)\frac{i\hbar}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+i\right)\frac{\hbar}{2}$$

ein, so erhalten wir mit

$$L_1^2 = L_1\bar{L}_1 = \frac{1}{2}\left(1+i\right)\left(1-i\right)\frac{\hbar^2}{4} = \frac{\hbar^2}{4}$$

bzw.

$$L_2^2 = L_2\bar{L}_2 = -\frac{1}{2}\left(1-i\right)\left(1+i\right)\frac{i^2\hbar^2}{4} = \frac{\hbar^2}{4}$$

und dem gemischten Term

$$L_1L_2 = -\frac{1}{2}\left(1+i\right)\left(1-i\right)\frac{\hbar^2}{4} = -\frac{1}{2}\left(1-i^2\right)\frac{\hbar^2}{4} = -\frac{\hbar^2}{4}$$

zwar eine verschwindende Quadratsumme:

$$L^2 = \left(L_1 + L_2\right)^2 = L_1^2 + 2L_1L_2 + L_2^2 = \frac{\hbar^2}{4} - \frac{\hbar^2}{2} + \frac{\hbar^2}{4} = 0,$$

woraus aber noch nicht gefolgert werden kann, daß

$$L = L_1 + L_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\frac{\hbar}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\frac{\hbar}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{i\hbar}{2} + \frac{i\hbar}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} i\hbar$$

gleich null ist. Hingegen ergibt sich mit der sauberen Definition des Doppeluniversums durch Einsetzen von

$$L = L_1 + iL_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\frac{\hbar}{2} - i\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\frac{\hbar}{2} = 0,$$
$$\bar{L} = L_1 - iL_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\frac{\hbar}{2} + i\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\frac{\hbar}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\hbar$$

einwandfrei die Unschärfe null,

$$L^2 = L\bar{L} = 0,$$

was für den quantenmechanischen Ansatz

$$L_1 = \frac{1}{2}\hbar, \quad L_2 = -\frac{1}{2}\hbar$$

nach Einsetzen in

$$L = L_1 + iL_2 = \frac{1}{2}\hbar - i\frac{1}{2}\hbar = \frac{1}{2}(1-i)\hbar, \quad \bar{L} = L_1 - iL_2 = \frac{1}{2}\hbar + i\frac{1}{2}\hbar = \frac{1}{2}(1+i)\hbar$$

nicht der Fall ist:

$$L^2 = L\bar{L} = \frac{1}{4}(1-i)(1+i)\hbar^2 = \frac{1}{2}\hbar^2 \neq 0.$$

Der quantenmechanische Ansatz ruft daher eine Unschärfe hervor, nur weil er die Doppelnatur des Universums nicht berücksichtigt.

Wie wir gezeigt haben, passen Relativitätstheorie und Quantenmechanik nicht zusammen. Doch für welche der beiden Theorien sollen wir uns entscheiden? Addieren wir die Energien wie die Spins der Quantenmechanik linear, müssen wir negative Massen, d.h. Antimassen zulassen. Dabei entspringt die negative Masse dem Antiuniversum. Doch wie kann es sein, daß diese im Universum auftaucht? Die Antwort könnte banal sein: Die Masse ändert sich nicht unter CPT-Transformation, also wurde sie beim Urknall auf beide Universen gleichverteilt. Geschwindigkeiten und Absolutbeträge sind bei CPT-Transformation invariant:

$$v = \frac{x}{t} = \frac{-x}{-t} \quad \text{bzw.} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2 + (-z)^2}.$$

Daher gilt $L_1 + L_2 = (m_1 + m_2)rv = 0$ nur dann, wenn $m_2 = -m_1 < 0$. Das gleiche gilt auch für die Spezielle Relativitätstheorie, die keinen gemischten Term aufweist. Substituiert man indes in der linearisierten Energie-Impuls-Relation $E = E_1 + E_2$ entsprechend

$$E = pc, \quad E_1 = p_1 c, \quad E_2 = p_x c,$$

so gibt es einen gemischten Term,

$$p^2 = \left(p_1 + ip_x\right)^2 = p_1^2 + 2ip_1 p_x + i^2 p_x^2.$$

Bringen wir diesen Tensor 2. Stufe auf die Form

$$dp^2 = dp_1^2 + 2idp_1 dp_x - dp_x^2 = \tilde{g}_{11} dp_1^2 + 2\tilde{g}_{12} dp_1 dp_x + \tilde{g}_{22} p_x^2,$$

sind die metrischen Koeffizienten gegeben durch

$$\tilde{g}_{11} = 1, \quad \tilde{g}_{12} = i, \quad \tilde{g}_{22} = -1.$$

Mit $p_x = ip_1$ ist der reziproke Raum ebenfalls flach und lichtartig,

$$dp^2 = dp_1^2 + 2i^2 dp_1^2 - i^2 dp_1^2 = dp_1^2 - 2dp_1^2 + dp_1^2 = 0,$$

und der vierdimensionale Impulsraum ebenso gekrümmt wie der reale euklidische.[1] Das differentielle Wegelement enthält nämlich Terme beider Universen, denn nur so ist erklärlich, warum die Relativitätstheorie gegen den Satz des Pythagoras verstoßen kann. Umgekehrt kann die Quantenmechanik von der Orthogonalität der Vektoren nur profitieren, und zwar auch ohne die Einführung negativer Massen. Die Orthogonalität der beiden Universen war in der Relativitätstheorie Albert Einsteins von Anfang an nicht vorgesehen, also ist auch die Relativitätstheorie unvollständig, so daß die gegenseitigen Vorwürfe beider Theorien in einer Patt-Situation enden.

Literatur

[1] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen: *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, Phys. Rev. 47 (1935), S. 777–780.

[2] J. S. Bell: *On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox*. In: *Physics*. Band 1, Nr. 3, 1964, S. 195–200.

[3] Alain Aspect, Philippe Grangier, Gérard Roger: *Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities*. In: *Phys. Rev. Lett.* Band 49, 1982, S. 91–94.

[1] Insofern ist auch die Relativitätstheorie nicht vollständig, denn von einer Krümmung des Impulses war bei Einstein nie die Rede. Nur wozu sollte wohl der Raum gekrümmt sein, wenn es der Impuls nicht ist?

